

分类号 _____
UDC _____

学校代码 10590
密 级 公开

深圳大学硕士学位论文

基于非凸低秩矩阵分解的 图像显著性目标检测模型研究

学位申请人姓名 张尧

专 业 名 称 应用数学

学院（系、所） 数学与统计学院

指导教师姓名 李敏

深圳大学学位论文原创性声明和使用授权说明

原创性声明

本人郑重声明：所提交的学位论文_____是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写的作品或成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律后果由本人承担。

论文作者签名：

日期： 年 月 日

学位论文使用授权说明

（必须装订在印刷本首页）

本学位论文作者完全了解深圳大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，即：研究生在校攻读学位期间论文工作的知识产权单位属深圳大学。学校有权保留学位论文并向国家主管部门或其他机构送交论文的电子版和纸质版，允许论文被查阅和借阅。本人授权深圳大学可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

（涉密学位论文在解密后适用本授权书）

论文作者签名：

导师签名：

日期： 年 月 日

日期： 年 月 日

摘要

在计算机视觉中，显著性目标检测任务既无处不在又充满挑战。本文主要研究基于非凸低秩矩阵分解的图像显著性检测建模和算法。主要包括：

1. 给出图像显著性目标检测的基本问题；概括建模所需的优化概念，定理、常用数据集及评价标准；

2. 提出一种基于加权组稀疏和 Schatten-1、Schatten-2/3 及 Schatten-1/2 范数的图像显著性目标检测模型，并给相应的 ADMM 算法及收敛性分析；

3. 建立一种基于 Schatten-2/3 范数和稀疏 $l_{2/3}$ 范数的非凸图像显著性目标检测模型，其本质上等价于“基于 Frobenius/核范数与非凸 $l_{2/3}$ 范数的检测模型”。同时，本文给出其相应的快速迭代算法和理论分析。实验表明新算法是有意义的。

关键词：低秩逼近； Schatten-p 范数； 矩阵分解； 稀疏； 乘子交替方向法 (ADMM)； 显著性目标检测

Abstract

Salient object detection is not ubiquitous but also challenging tasks in the study of computer vision. In this paper, we focus on the salient object detection models based on non-convex low-rank matrix decomposition. The main work can be summarized as follows:

1. The basic problems about salient object detection are given, some basic mathematical definitions and theories of optimization used in modeling are discussed and some popular datasets about salient object detection and evaluation metrics are introduced.

2. A novel regularization model for salient object detection is proposed, which integrates a weighted group sparsity with the convex Schatten-1 or the non-convex Schatten-2/3 and Schatten -1/2 norm, respectively. The corresponding alternative direction method of multiplier (ADMM) with derived solutions are discussed in detail, and the convergence of algorithm is validated.

3. A new approach for the salient object detection is developed, in which the Schatten-2/3 is integrated with the non-convex sparse $l_{2/3}$ norm. The proposed model essentially can be viewed as “Frobenius/nuclear hybrid norm + non-convex $l_{2/3}$ norm”, which can be set by splitting the objective function and then solved by using the alternating direction method of multiplier (ADMM). Convergence of the algorithm is discussed in detail. And experimental results verify the efficiency of the algorithm.

Key words: Low Rank Approximation, Schatten-p Norm, Matrix Decomposition, sparse, ADMM, Salient Object Detection

目 录

摘 要.....	I
Abstract.....	II
第 1 章 绪论.....	1
1.1 课题研究的意义.....	1
1.2 经典图像显著性目标检测模型简介.....	1
1.3 低秩图像显著性目标检测模型简介.....	1
1.4 本文的主要结构.....	2
第 2 章 理论知识.....	3
2.1 低秩模型.....	3
2.1.1 低秩模型的理论基础.....	3
2.1.2 低秩模型分类.....	6
2.2 增广拉格朗日乘子法 ALM.....	6
2.3 交替方向乘子法 ADMM 简介.....	6
2.4 软阈值 SVT 方法简介.....	7
2.5 Schatten-p 拟范数分解的几个结果.....	12
2.6 显著性目标检测常见的几个数据集及评价标准.....	13
第 3 章 一种基于非凸和谱稀疏矩阵分解的图像显著性检测模型.....	15
3.1 建立图像显著性检测模型.....	15
3.2 模型求解.....	16
3.3 算法.....	23
3.4 收敛性分析.....	25
3.5 数值实验.....	27
3.6 本章小结.....	28
第 4 章 一种基于双因子矩阵分解的非凸图像显著性检测模型.....	31
4.1 建立模型.....	31
4.2 模型求解.....	31

4.3 算法.....	34
4.4 收敛性分析.....	35
4.5 数值实验.....	36
4.6 本章小结.....	38
第5章 总结与展望.....	40
参 考 文 献.....	41
致 谢.....	45
攻读硕士学位期间的研究成果.....	46

第 1 章 绪论

1.1 课题研究的意义

随着人工智能技术的发展，我们不仅希望可以进行智能计算，同时希望计算机可以像我们人类一样对某些事物作出正确的判断。例如，当我们面对一幅图像时，注意力很快会被图像上“不一样”的部分所吸引。因此，当我们把这幅图像输入计算机时，希望计算机可以很快地识别这张图像中“不一样”的部分。而这些“不一样”的部分，在某种意义下就是这张图片的显著性目标。

图像显著性目标检测是计算机视觉的重要任务之一，已经被广泛地应用到图像裁剪，移动终端上的图像自适应显示、图像滤波、视频监控和运动分割。

1.2 经典图像显著性目标检测模型简介

经典的显著性目标检测模型包括：自顶向下和由底向上的两种模型。自顶向下是一种基于任务驱动模型，通常采用人类感知的高层信息去捕捉图像的显著性目标，例如上下文信息、语义信息及背景先验信息等。由底向上是一种基于计算机视觉底层刺激驱动模型，涉及颜色、纹理、位置、图像的局部和全局的中心周边差异等特征。但是，由底向上的模型极易将背景成分的部分内容错误地检测成显著性目标。

1.3 低秩图像显著性目标检测模型简介

近来，一种流行的趋势就是将自顶向下和由底向上的两种模型有机结合。其中，基于低秩的图像模型就属于这个范畴。

众所周知，一幅图像不同区域的像素在局部颜色和纹理轮廓上截然不同。局部特征通常指的是一个 $N \times N$ 的窗口或一个超像素。对于常见的图像表示或压缩格式(例如 JPEG 和 JPEG 2000)，人们习惯了压缩背景，突出细节。而且，在忽略个别差异的情形下，采用相同的线性滤波器或基(例如傅里叶变换、离散余弦变换、小波或曲线波)去表示整个局部的轮廓。例如， I_j 表示第 j 个图像块， b_1, b_2, \dots, b_d 是图像的一组基。那么，所有的

图像块可以由这组基表示，即
$$I_j = \sum_{i=1}^d y_{ij} b_i。$$

基于这种建模思想，这幅图像被分割成不同的区域。而每个区域由局部轮廓特征张成一个低维线性子空间。这就激发了大量降维的模型、算法及应用。例如，在[15]中，作者对显著性检测数据的背景矩阵秩做了统计。其基本思想是：把每幅图像分割成

10×10 窗口大小的图像块，然后将扣除了 Groundtruth 中显著性物体的区域作为背景。显然，此时背景应该是低秩的。其秩的定义为：

$$r^* = \arg \min_r \{RMSRE(r-1) - RMSRE(r) < \varepsilon\}$$

其中 RMSRE 是矩阵重建的均方误差。关于背景矩阵秩出现的概率如图 1.1 [15]。

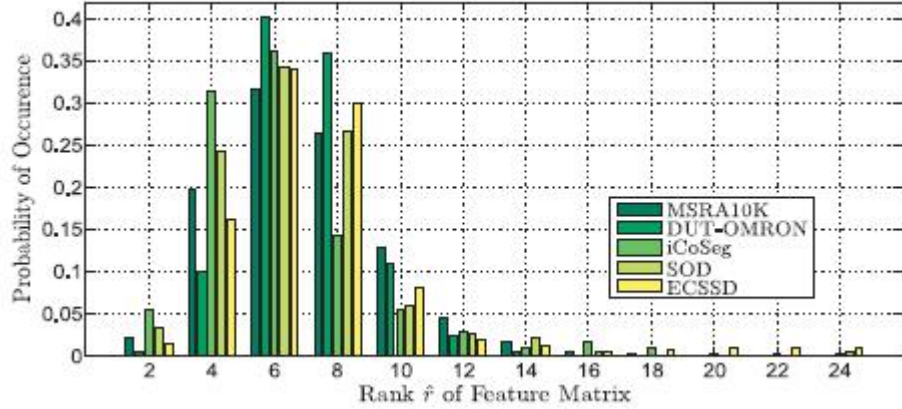


图 1.1 背景矩阵秩出现的概率

由图可知：在图像的特征空间矩阵中，背景秩 90%以上都小于 10。那么图像的显著性物体部分就由少量的非 0 元素组成。于是，图像的显著性检测可以表示成：

$$\begin{aligned} & \arg \min_{L,S} Rank(L) + \lambda Sparse(S) \\ & s.t. F = L + S \end{aligned}$$

其中 $F \in R^{m \times n}$ 是图像特征空间下的矩阵表示； $L \in R^{m \times n}$ 是背景部分，用秩函数来刻画； $S \in R^{m \times n}$ 是显著性目标，用稀疏性来表示； λ 是平衡参数（特别地，下文如无特殊说明 $F, L, S \in R^{m \times n}$ ）。

1.4 本文的主要结构

本文第一章简要介绍显著性目标检测的背景和意义。第二章详细介绍低秩模型的数学理论基础。第三章主要介绍我们的第一个模型，一种基于非凸低秩谱稀疏的显著性目标检测模型，我们给出对应的算法，算法收敛性和数值实验结果。第四章主要介绍我们的第二个模型，一种非凸的基于双因子矩阵分解的显著性目标检测模型，我们给出算法，算法收敛性和数值实验结果。第五章是本文的总结和展望。

第 2 章 理论知识

2.1 低秩模型

在介绍低秩模型前，我们首先介绍一下凸集和凸函数的有关概念。

定义 2.1.1 (凸集) 若集合 $X \subseteq R^n$ 被称作凸集当且仅当对 $\forall x, y \in X$ ，当 $\lambda \in [0,1]$ 时，有 $\lambda x + (1-\lambda)y \in X$ 。

定义 2.1.2 (凸函数) 函数 $f: X \rightarrow R$ ， $X \subseteq R^n$ 为凸集， f 称作凸函数当且仅当对任意 $x, y \in X$ 和任意 $\lambda \in [0,1]$ 满足：

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

我们称 f 严格凸当且仅当 $x \neq y$ 时不等式严格成立。

凸函数的性质在求解优化问题时极为重要。例如，求解一个凸函数的最小值。

定理 2.1.1 (凸函数的最小值[1]) 若凸函数 f 定义在一个凸集 $X \subseteq R^n$ 有最小值，则 f 满足如下性质：

- (1) f 的每一个局部极小值都是它的全局最小值。
- (2) f 的最小值构成的集合是一个凸集。
- (3) 若 f 严格凸，则 f 有唯一的最小值 x^* 。

2.1.1 低秩模型的理论基础

在 1.3 节我们给出图像的显著性目标检测模型为：

$$\min_{L,S} \text{rank}(L) + \lambda \|S\|_0$$

$$s.t. \quad F = L + S$$

但是，上述问题是非凸的(举例说明)。例如，假设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 和 } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

于是，

$$\text{rank} \left(\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B \right) = \text{rank} \left(\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \right) = 2。$$

又

$$\frac{1}{2} \text{rank}(A) + \frac{1}{2} \text{rank}(B) = \frac{1}{2} \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1。$$

显然， $2 > 1$ 。因此，不难发现：

$$\left\| \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B \right\|_0 = \left\| \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \right\|_0 = 2 > \frac{1}{2}\|A\|_0 + \frac{1}{2}\|B\|_0 = 1。$$

受矩阵填充问题求解方法的启发，上述显著性极小化问题可以松弛为：

$$\arg \min_{L,S} \|L\|_* + \lambda \|S\|_1$$

$$s.t. \quad F = L + S$$

其中， $L = U\Sigma V^T$ ， $UU^T = I_m$ (I_m 是 $m \times m$ 的单位矩阵)， $VV^T = I_n$ (I_n 是 $n \times n$ 的单位矩阵)，

$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0)$ ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$)。显然，这是 L 的奇异值分解

(SVD)， $\|L\|_* = \sum_{i=1}^r \sigma_i$ 。因此， $\|L\|_*$ 是核函数， σ_i 是奇异值。此外， $\|S\|_1 = \sum_{ij} |s_{ij}|$ ($s_{ij} \neq 0$)。

引理 2.1.1 若 f, g 是定义在凸集 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的凸函数，则 $f + g$ 也是定义在凸集 X 上的凸函数。

证明： $\forall \lambda \in [0, 1], x, y \in X$,

$$\begin{cases} f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \\ g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) \end{cases} \\ \Rightarrow (f+g)(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda(f+g)(x) + (1-\lambda)(f+g)(y)。 \quad \square$$

定义 2.1.3 (矩阵范数) 给定矩阵， $\|A\|_N$ 称作矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 的范数当且仅当 A 满足

$$(1) \quad \|A\|_N = 0 \Leftrightarrow A_{ij} = 0, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

$$(2) \quad \|\lambda A\|_N = |\lambda| \|A\|_N, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(3) \quad \|A+B\|_N \leq \|A\|_N + \|B\|_N \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

不难验证，核函数 $\|\cdot\|_*$ 满足矩阵的范数定义 (1)(2)， $\|\cdot\|_1$ 满足矩阵范数定义 (1)(2)(3)。为了证明 $\|\cdot\|_*$ 和 $\|\cdot\|_1$ 是凸函数，我们首先介绍下列引理。

引理 2.1.2 矩阵的任意范数是凸函数。

证明： $\forall \lambda \in [0, 1]$ ，任意给定矩阵 $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ，有

$$\|\lambda A + (1-\lambda)B\|_N \leq \|\lambda A\|_N + \|(1-\lambda)B\|_N = \lambda \|A\|_N + (1-\lambda)\|B\|_N。 \quad \square$$

下面我们证明核函数 $\|\cdot\|_*$ 满足定义 2.1.3 的条件(3)。

定义 2.1.4 (矩阵的算子范数) 给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ， A 的算子范数定义为：

$$\|A\| = \max_{\|u\|_2=1} \|Au\|_2,$$

其中 $u \in \mathbb{R}^n, \|u\|_2 \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}, \|Au\|_2 \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^m (Au)_i^2}$ 。

引理 2.1.2 [3] 给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ， σ_1 是 A 的最大的奇异值，则 $\|A\| = \sigma_1$ 。

引理 2.1.3 给定矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，则 $\max_{1 \leq i \leq n} |Q_{ii}| \leq \|Q\|$ 。

证明：记 $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$ ，向量的第 i 个元素为 1，其余都为 0，则

$$\{e_i \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \{x : \|x\|_2 = 1, x \in \mathbb{R}^n\}, Qe_i = (Q_{1i}, Q_{2i}, \dots, Q_{ni})^T.$$

同时， $\max_i |Q_{ii}| \leq \max_i \sqrt{\sum_j Q_{ji}^2} = \max_i \sqrt{\langle Qe_i, Qe_i \rangle} = \max_i \|Qe_i\|_2 \leq \max_{\|x\|_2=1} \|Qx\|_2 = \|Q\|$ 。□

定理 2.1.4 [2] 已知矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ， $\|A\|_* = \sup_{\|B\| \leq 1} \langle A, B \rangle$ ($\|\cdot\|_*$ 和 $\|\cdot\|$ 互为对偶范数)。

其中 $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ， $\langle A, B \rangle$ 定义为矩阵 A, B 的内积， $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^T B)$ ， $\text{Tr}(\cdot)$ 指矩阵的对角线元素之和。

证明：给定矩阵 A 的奇异值分解为 $A = U \Sigma V^T$ 。由定理 2.1.3 知 $|B_{ii}| \leq 1$ 。所以

$$\max_{\|B\| \leq 1} \text{tr}(A^T B) \leq \max_{\{M: \max_i |M_{ii}| \leq 1\}} \text{tr}(\Sigma^T M) = \max_{\{M: \max_i |M_{ii}| \leq 1\}} \sum_{i=1}^r \sigma_i M_{ii} \leq \sum_{i=1}^r \sigma_i = \|A\|_*.$$

因为迹函数是闭区间上的连续函数，所以 $\max_{\|B\| \leq 1} \text{tr}(A^T B) = \sup_{\|B\| \leq 1} \text{tr}(A^T B)$ ，即

$$\sup_{\|B\| \leq 1} \text{tr}(A^T B) \leq \|A\|_*.$$

另一方面，令 $B = UV$ ， U, V 满足 $A = U \Sigma V^T$ ，则 $\text{tr}(A^T B) = \text{tr} \Sigma = \sum_{i=1}^r \sigma_i$ 。

综上，定理 2.1.4 成立(特别地这里的奇异值分解是紧凑型分解)。□

定理 2.1.5 给定矩阵 $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ，有

$$\|A + B\|_* \leq \|A\|_* + \|B\|_*$$

证明：

$$\|A + B\|_* = \sup_{\|C\| \leq 1} \langle A + B, C \rangle \leq \sup_{\|D\| \leq 1} \langle A, D \rangle + \sup_{\|E\| \leq 1} \langle B, E \rangle = \|A\|_* + \|B\|_*. \quad \square$$

综上所述, $\|\cdot\|_*$ 和 $\|\cdot\|_1$ 都满足范数的定义。于是, 根据引理 2.1.2, 我们可以得出 $\|\cdot\|_*$ 和 $\|\cdot\|_1$ 都是凸函数。当凸函数次梯度集合的基数大于 1 时, 该凸函数是非光滑函数 ($\|\cdot\|_*$ 和 $\|\cdot\|_1$ 的非光滑性在 2.4 节给出说明)。

2.1.2 低秩模型的分类

文献中常用的低秩逼近形式有 [6, 7, 8, 9]:

- 1). $Rank(A) \rightarrow \log \det(I + A^T A)$;
- 2). $Rank(A) \rightarrow \|A\|_* - \sum_{i=1}^k \sigma_i, k < r$;
- 3). $Rank(A) \rightarrow Schatten - p$ 范数 (2.5 节详细讨论);
- 4). $Rank(A) \rightarrow \sum_{i=1}^r \log(1 + \sigma_i^2)$;
- 5). $Rank(A) \rightarrow \log \det(diag(Y, Z) + \delta I)$, 其中 $\begin{bmatrix} Y & X \\ X^T & Z \end{bmatrix} \geq 0$ 。

2.2 增广拉格朗日乘子法 ALM

设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ 是一个带约束条件的函数, 求 f 的极小值, 即

$$x^* = \arg \min_x f(x) \quad s.t. \quad h(x) = 0,$$

其中 $h = (h_1, h_2, \dots, h_m)^T$ 是从 \mathbb{R}^n 映射到 \mathbb{R}^m 的光滑函数。那么, 利用增广拉格朗日乘子法, 该条件极小值问题可以转化成含有惩罚项的无约束优化问题。即:

$$L_c(x, \lambda) \triangleq f(x) + \lambda^T h(x) + \frac{c}{2} \|h(x)\|^2$$

其中 $L_c(\cdot, \cdot): \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^m, c > 0$, c 为惩罚参数。

定理 2.1.5 [10] 若 $x_i, i = 0, 1, \dots$ 是无约束优化问题 $\min_x L_{c_i}(x, \lambda_i)$ 的最小值, $\{\lambda_i\}$ 是有界的, $\{c_i\}$ 是递增的数列且 $c_i \rightarrow \infty$, 那么 $\{x_i\}$ 有极值点, 且极值点是该优化问题的解。

2.3 交替方向乘子法 ADMM 简介

假设目标函数是多个简单函数的线性组合, 即

$$\min_x f(x) = \sum_{i=1}^N f_i(x_i), \quad s.t. \quad \sum_{i=1}^N A_i x_i = b.$$

如果目标函数可分解成两个简单凸函数的线性组合, 我们有

$$\min_{x,y} f(x) + g(y) \quad s.t. \quad Ax + By = b。$$

其中 $f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$, $g: \mathcal{R}^p \rightarrow \mathcal{R}$ 是两个简单凸函数, $A \in \mathcal{R}^{m \times n}, B \in \mathcal{R}^{m \times p}$ 和 $b \in \mathcal{R}^m$ 。

于是, 上述问题的增广朗日函数为:

$$L_\mu(x, y, \mu) \triangleq f(x) + g(y) + \langle \lambda, Ax + By - b \rangle + \frac{\mu}{2} \|Ax + By - b\|_2^2$$

其中 $\mu > 0$ 且单调上升到无穷。

因此, 基于交替方向乘子法 ADMM 的迭代格式可以表示为:

$$x_{i+1} = \arg \min_x L_\mu(x, y_i, \lambda_i);$$

$$y_{i+1} = \arg \min_y L_\mu(x_{i+1}, y, \lambda_i);$$

$$\lambda_{i+1} = \lambda_i + (Ax_{i+1} + By_{i+1} - b) / \mu。$$

于是, 基于上述迭代格式的序列 $\{(x_i, y_i, \lambda_i)\}$ 就收敛到原优化问题的全局最优解[11]。

同理, 类似的结论可以推广到 $i \geq 3$ 时的优化问题[12]:

$$\min_x f(x) = \sum_{i=1}^N f_i(x_i), \quad s.t. \quad \sum_{i=1}^N A_i x_i = b。$$

2.4 软阈值 SVT 方法简介

由于次梯度在模型优化算法中至关重要, 因此在这部分首先给出次梯度的定义。

定义 2.4.1 给定函数 $f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$, f 在 $x \in \mathcal{R}^n$ 处的次梯度 $g \in \mathcal{R}^n$ 定义为, 对 $\forall y \in \mathcal{R}^n$ 有

$$f(y) \geq f(x) + g^T(y - x)。$$

定理 2.4.1 (最优条件) 凸函数 f 在 x 处取得极小值(即最小值)当且仅当 $0 \in \{g\}$, 即 0 是 f 在 x 处的一个次梯度向量。

证明: 根据次梯度的定义, 对任意 $y \in \mathcal{R}^n$ 时, 我们有

$$f(y) \geq f(x) + g^T(y - x)。$$

若 $g = 0$, 则 $f(y) \geq f(x)$, 即 f 在 x 处取得极小值。又由于 f 是凸函数, 因此 f 在 x 处取得最小值。□

同理, 我们可以定义矩阵实值函数: $f: \mathcal{R}^{m \times n} \rightarrow \mathcal{R}$ 在 $X \in \mathcal{R}^{m \times n}$ 处的次梯度 $G \in \mathcal{R}^{m \times n}$, 对任意 $Y \in \mathcal{R}^{m \times n}$, 有

$$f(Y) \geq f(X) + \langle G, (Y - X) \rangle。$$

类似地, 矩阵实值函数的最优条件为: 0 矩阵是 f 在 X 处的一个次梯度。

引理 2.4.1 ($\|\cdot\|_*$ 的次梯度) [2, 4, 5, 13] 已知矩阵 $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, $A = U \Sigma V^T$ 是矩阵 A 的奇异值分解。对任何一个矩阵 $G \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, 只要其满足:

$$G = UV^T + W, \quad \|W\| \leq 1, U^T W = 0, W V = 0,$$

那么 G 是 $\|A\|_*$ 在 A 处的一个次梯度。

证明: 首先, 我们考虑 $\langle W, A \rangle = 0$ 。事实上,

$$Y = \sup_{\|G\| \leq 1} \langle G, Y \rangle \geq \langle G, Y \rangle = \langle G, Y - A + A \rangle = \langle G, A \rangle + \langle G, Y - A \rangle$$

当 $G = UV^T$ 时,

$$\langle UV^T, A \rangle = \text{Tr}(V U^T U \Sigma V^T) = \text{Tr} \Sigma = \|A\|_*。$$

因此, G 满足

$$G = UV^T + W,$$

其中 $G \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ 。将 G 带入上式, 有

$$\begin{aligned} Y &= \sup_{\|G\| \leq 1} \langle G, Y \rangle \\ &\geq \langle G, Y \rangle \\ &= \langle G, Y - A + A \rangle \\ &= \langle G, A \rangle + \langle G, Y - A \rangle \\ &= \langle UV^T + W, A \rangle + \langle G, Y - A \rangle \\ &= \langle UV^T, A \rangle + \langle G, Y - A \rangle + \langle W, A \rangle \\ &= \|A\|_* + \langle G, Y - A \rangle + \langle W, A \rangle \end{aligned}$$

于是, 我们得到:

$$U^T W = 0 \Leftrightarrow A^T W = V \Sigma U^T W = 0;$$

和

$$W V = 0 \Leftrightarrow W A^T = W V \Sigma U^T = 0。$$

因此, $0 = \text{Tr}(A W^T) = \text{Tr}(W A^T) = \langle W, A \rangle$, 即这就说明 $U^T W = 0, W V = 0$ 是 $\langle W, A \rangle = 0$ 的充要条件。

下面证明 $\|G\| \leq 1$ 。

已知 $V = [v_1, v_2, \dots, v_r]$, v_1, v_2, \dots, v_r 是 A 的行空间的一组标准正交基, 所以 UV^T 属于 A 的行空间。根据 W 的性质, W 属于 A 的行空间的正交补。于是,

$$\begin{aligned}
 \|G\|^2 &= \sup_{\|u\|_2=1} \|Gu\|_2^2 \\
 &= \sup_{\|u\|_2=1} \|UV^t u\|_2^2 + \|Wu\|_2^2 \\
 &= \sup_{\|u\|_2=1} \|UV^t(\mathcal{P}_{\text{row}(A)} + \mathcal{P}_{\text{row}(A)^\perp})u\|_2^2 + \sup_{\|u\|_2=1} \|W(\mathcal{P}_{\text{row}(A)} + \mathcal{P}_{\text{row}(A)^\perp})u\|_2^2 \\
 &= \sup_{\|u\|_2=1} \|UV^t \mathcal{P}_{\text{row}(A)} u\|_2^2 + \sup_{\|u\|_2=1} \|W \mathcal{P}_{\text{row}(A)^\perp} u\|_2^2 \\
 &= \sup_{\|u\|_2=1} \|UV^t \frac{\mathcal{P}_{\text{row}(A)} u}{\|\mathcal{P}_{\text{row}(A)} u\|_2} \|\mathcal{P}_{\text{row}(A)} u\|_2\|_2^2 + \sup_{\|u\|_2=1} \|W \frac{\mathcal{P}_{\text{row}(A)^\perp} u}{\|\mathcal{P}_{\text{row}(A)^\perp} u\|_2} \|\mathcal{P}_{\text{row}(A)^\perp} u\|_2\|_2^2 \\
 &\leq \sup_{\|u_1\|_2=1} \|UV^t u_1\|_2^2 \cdot \|\mathcal{P}_{\text{row}(A)} u\|_2^2 + \sup_{\|u_2\|_2=1} \|W u_2\|_2^2 \cdot \|\mathcal{P}_{\text{row}(A)^\perp} u\|_2^2 \\
 &= \|UV^t\|_2^2 \cdot \|\mathcal{P}_{\text{row}(A)} u\|_2^2 + \|W\|_2^2 \cdot \|\mathcal{P}_{\text{row}(A)^\perp} u\|_2^2 \\
 &\leq 1
 \end{aligned}$$

显然， $\|G\| \leq 1$ (特别注意：这里的奇异值分解 SVD 是紧凑性的 SVD)。□

定理 2.4.2 ($\|\cdot\|_*$ 的 SVT) [2, 5, 13] 已知矩阵 $Y \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, $\tau > 0$, 则下列优化问题

$$\min_{X \in \mathfrak{R}^{m \times n}} \frac{1}{2} \|X - Y\|_F^2 + \tau \|X\|_*$$

的最优解为

$$X^* = D_\tau(Y) = US_\tau(\Sigma)V^T,$$

其中

$$S_\tau(\Sigma)_{ii} = \begin{cases} \Sigma_{ii} - \tau & \text{if } \Sigma_{ii} > \tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

证明：上述优化问题在 X 处的次梯度为 $X - Y + \tau G$, 其中 G 是 $\|X\|_*$ 的次梯度。下面我们证明 $X - Y + \tau G$ 在 $X = D_\tau(Y)$ 处的次梯度包含 0。显然，

$$X - Y + \tau G = D_\tau(Y) - Y + \tau G = 0 \Leftrightarrow G = \frac{1}{\tau} (Y - D_\tau(Y)).$$

如果将 Y 的奇异值分解按照奇异值是否大于 τ 分成两部分 Σ_1, Σ_2 , 把 U, V 也分成两部分 U_1, U_2 和 V_1, V_2 , 即

$$Y = U \Sigma V^T = [U_1 U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} [V_1 V_2]^T.$$

于是，

$$D_\tau(Y) = U_1 (\Sigma_1 - \tau I) V_1^T.$$

紧接着, 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau}(Y - D_\tau(Y)) &= \frac{1}{\tau}[U_1 \Sigma_1 V_1^T + U_2 \Sigma_2 V_2^T - (U_1(\Sigma_1 - \mathcal{d})V_1^T)] \\ &= U_1 V_1^T + \frac{1}{\tau} U_2 \Sigma_2 V_2^T.\end{aligned}$$

因此, 当 $(\Sigma_2)_{ii} < \tau$ 时有 $\left\| \frac{1}{\tau} U_2 \Sigma_2 V_2^T \right\| = \frac{1}{\tau} \max_i (\Sigma_2)_{ii} \leq 1$ 。

此外,

$$\begin{aligned}U_1^T \left[\frac{1}{\tau} U_2 \Sigma_2 V_2^T \right] &= \frac{1}{\tau} (U_1^T U_2) (\Sigma_2 V_2^T) = 0, \\ \left(\frac{1}{\tau} U_2 \Sigma_2 V_2^T \right) V_1 &= \left(\frac{1}{\tau} U_2 \Sigma_2 \right) (V_2^T V_1) = 0.\end{aligned}$$

综上所述, 上述优化问题的最优解为 $D_\tau(Y)$ 。□

引理 2.4.1 绝对值函数 $|\cdot|: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ 在 x 处的次梯度为:

$$\begin{cases} \text{sign}(x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

证明: 若 $x \neq 0$, 则 $|x|$ 的次梯度为 $\begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ 。

若 $x = 0$, 则对 $\forall y \in \mathfrak{R}$, 有 $|y| = |0 + y| \geq 0 + g(y - 0) = gy$ 。于是,

$$\begin{cases} 1 = \frac{|y|}{y} \geq g & y > 0 \\ -1 = \frac{|y|}{y} \leq g & y < 0 \end{cases}$$

此外, 当 $y = 0$ 时, g 为任意实数。于是, $|g| \leq 1$ 。□

定理 2.4.3 $G = (g_{ij})_{m \times n} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ 是 $\|X\|_1: \mathfrak{R}^{m \times n} \rightarrow \mathfrak{R}, X = (x_{ij})_{m \times n}$ 的次梯度的充要条件是 g_{ij} 为 $|\cdot|: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ 在 x_{ij} 处的次梯度。

证明: 必要性。

对 $\forall y \in \mathfrak{R}$, 有

$$|y| = |x_{ij} + \|X + (y - x_{ij})e_{ij}\|_1 - \|X\|_1,$$

其中 $E = (e_{jk})_{m \times n} \in \mathfrak{R}$ 。当 $j = i, k = j$ 时, $e_{jk} = 1$, 否则 $e_{jk} = 0$ 。

由于 G 是 $\|\cdot\|_1$ 在 X 处的次梯度，因此，

$$\begin{aligned} |y| &= |x_{ij}| + \|X + (y - x_{ij})e_{ij}\|_1 - \|X\|_1 \\ &\geq |x_{ij}| + \|X\|_1 + \langle G, (y - x_{ij})e_{ij} \rangle - \|X\|_1 \\ &= |x_{ij}| + g_{ij}(y - x_{ij}) \end{aligned}$$

于是， g_{ij} 是 $|\cdot|$ 在 x_{ij} 处的梯度。

充分性。

对 $\forall Y = (y_{ij})_{m \times n} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ ，有 $\|Y\|_1 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m |y_{ij}|$ 。又因为 g_{ij} 是 $|\cdot|: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ 在 x_{ij} 处的次梯

度，于是

$$|y_{ij}| \geq |x_{ij}| + g_{ij}(y_{ij} - x_{ij})。$$

所以，

$$\begin{aligned} \|Y\|_1 &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m |y_{ij}| \\ &\geq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (|x_{ij}| + g_{ij}(y_{ij} - x_{ij})) \quad \square \\ &= \|X\|_1 + \langle G, Y - X \rangle \end{aligned}$$

此外，结合上述证明过程，向量 1 范数次梯度可以被推广为下列形式。即

定理 2.4.4 $\|\cdot\|_1$ 在 $x \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ 处的次梯度 $G \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ 满足：

$$\begin{cases} g_{ij} = \text{sign}(x_{ij}) & x_{ij} \neq 0 \\ |g_{ij}| \leq 1 & x_{ij} = 0 \end{cases}。$$

定理 2.4.5 [2, 13] ($\|\cdot\|_1$ 的 SVT) 已知矩阵 $Y \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, $\tau > 0$ ，则优化问题

$$\min_{X \in \mathfrak{R}^{m \times n}} \frac{1}{2} \|X - Y\|_F^2 + \tau \|X\|_1$$

的最优解为 $X = S_\tau(Y)$ ，其中

$$(S_\tau(Y))_{ij} = \begin{cases} y_{ij} - \tau \cdot \text{sign}(y_{ij}) & |y_{ij}| > \tau \\ 0 & |y_{ij}| \leq \tau \end{cases}。$$

证明：优化问题的目标函数的次梯度为 $X - Y + \tau G$ ，其中 G 是 $\|\cdot\|_1$ 在 $X = S_\tau(Y)$ 处的次

梯度。接下来，我们需要证明 $G = \frac{1}{\tau}(Y - S_\tau(Y))$ 。事实上，

$$\frac{1}{\tau}(Y - S_\tau(Y))_{ij} = \begin{cases} \text{sign}(y_{ij}) & |y_{ij}| > \tau \\ \frac{y_{ij}}{\tau} & |y_{ij}| \leq \tau \end{cases} = \begin{cases} \text{sign}(S_\tau(Y)_{ij}) & S_\tau(Y)_{ij} \neq 0 \\ \leq 1 & S_\tau(Y)_{ij} = 0 \end{cases} \circ \square$$

2.5 Schatten-p 拟范数分解的几个结果

定义 2.5.1 (Schatten-p 范数) 已知矩阵 $X \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ (不妨设 $m \geq n$), 对任意 p , $0 \leq p < \infty$, Schatten-p 范数 $\|\cdot\|_{S_p} : \mathfrak{R}^{m \times n} \rightarrow \mathfrak{R}$ 定义为:

$$\|X\|_{S_p} \equiv \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^p \right)^{1/p},$$

其中 σ_i 是 X 的奇异值。

令 $\sum_{i=1}^n \sigma_i^p = a$, 根据 *Hölder* 和 *Minkowski* 不等式知: $\|\cdot\|_{S_p}$ ($p \geq 1$) 满足范数的定义。

当 $p=1$ 时 $\|\cdot\|_{S_1} = \|\cdot\|_*$; 当 $p=2$ 时, $\|\cdot\|_{S_2} = \|\cdot\|_F$; 当 $p=0$ 时, $\|\cdot\|_{S_0} = \text{rank}(\cdot)$ 。但 $\|\cdot\|_{S_p}$ ($0 < p < 1$) 不满足范数的要求。例如,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \Sigma_A + \Sigma_B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \circ$$

当 $p = \frac{1}{2}$ 时, $(\Sigma_A)_{S_{1/2}} + (\Sigma_B)_{S_{1/2}} = 6 + \sqrt{2}$, $(\Sigma_A + \Sigma_B)_{S_{1/2}} = 4 + 2\sqrt{3}$ 。但是,

$$(\Sigma_A + \Sigma_B)_{S_{1/2}} > (\Sigma_A)_{S_{1/2}} + (\Sigma_B)_{S_{1/2}} \circ$$

引理 2.5.1 任意实数 $a, b \geq 0$, 若 $0 < p < 1$ 则有 $(a+b)^p \leq a^p + b^p$ 。

证明: 若 a, b 中有一个为零, 则不等式显然成立, 且等号成立。接下来, 我们证明

$$(a+b)^p \leq a^p + b^p \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{b} \right)^p \leq \left(\frac{a}{b} \right)^p + 1, a \geq 0, b > 0 \circ$$

令 $f(t) = (1+t)^p - t^p - 1$, $t \geq 0, 0 < p < 1$ 。若固定 p , 则 $f(t)$ 是一个递减函数。于是, $f(t) \leq f(0) = 0$, 即 $(a+b)^p \leq a^p + b^p$ 。

由引理 2.5.1 知, $(a+b)^p - a^p \leq b^p$, 则 $\lim_{b \rightarrow 0} [(a+b)^p - a^p] = 0$, $0 < p < 1$ 。因此,

$\|\cdot\|_{S_p}^p$ ($0 < p < 1$) 是连续函数。□

接下来, 介绍拟范数 $\|\cdot\|_{S_p}^p$ ($p=1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$) 基于矩阵分解的表示形式。

定理 2.5.1 [2, 14] 已知矩阵 $X = UV^T = L\Sigma R^T \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, $U \in \mathfrak{R}^{m \times k}$, $V \in \mathfrak{R}^{n \times k}$, $L \in \mathfrak{R}^{m \times m}$, $R \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0) \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, $k \geq \text{Rank}(X)$, 则

$$\|X\|_{S_1}^1 = \|X\|_* = \min_{U,V} \frac{1}{2} (\|U\|_F^2 + \|V\|_F^2);$$

$$\|X\|_{S_{2/3}}^{2/3} = \min_{U,V} \frac{1}{3} (2\|U\|_* + \|V\|_F^2);$$

$$\|X\|_{S_{1/2}}^{1/2} = \min_{U,V} \frac{1}{2} (\|U\|_* + \|V\|_*).$$

2.6 显著性目标检测常见的几个数据集及评价标准

常见的显著性目标检测数据集主要有 MSRA10k, DUT-OMRON, IcoSeg 和 ECSSD。其中, MSRA10K 包括一万幅只有单一显著性目标物体的图像; DUT-OMRON 包括五千一百六十八幅具有复杂的背景的图像; IcoSeg 由六百四十三幅尺寸大小不一的图像组成, 并且每幅图像都包含多个显著性目标; 此外, ECSSD 包括一千幅多种属性显著性目标的图像。

针对显著性目标检测, 常用的评价分类有: TP 代表正确预测成正样本; TN 为正确预测成负样本; FP 表示负样本被预测成正样本; FN 是正样本被预测成负样本。

此外, 针对显著性目标检测的评价标准有:

- F_β -度量曲线:

$$F_\beta = (1 + \beta^2) \frac{P \cdot R}{\beta^2 P + R} \quad (P = \frac{TP}{TP + FP}, R = \frac{TP}{TP + FN}),$$

其中 P 是查准率, R 是召回率, β 是平衡参数, F_β 曲线越靠上越好。

- AUC 是 ROC 曲线下的面积, ROC 曲线是指 (FPR, TPR) 构成的曲线, 并且 AUC 的值越大越好。其中,

$$FPR = \frac{FP}{FP + TN}, TPR = \frac{TP}{TP + FN}。$$

- 重叠率 OR :

$$OR = \frac{|S' \cap G|}{|S' \cup G|},$$

其中 S' 是预测的显著性部分, G 是真实显著性部分, OR 越大越好。

- 均方误差 MAE :

$$MAE = \text{mean}(|S - G|),$$

其中 S 是预测的显著性部分， G 是真实显著性部分， MAE 越大越好。

- WF 是一种加权的 F_β 曲线。

第 3 章 一种基于非凸和谱稀疏矩阵分解的图像显著性检测模型

3.1 建立图像显著性检测模型

已知自然图像 I ，利用过分割技术把它分成 N 块 $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_N\}$ 。对于每一个图像块 P_i ， D 维的底层视觉向量为 $f_i \in \mathfrak{R}^D$ 。于是，生成图像 I 的特征矩阵为 $F = [f_1, f_2, \dots, f_N] \in \mathfrak{R}^{D \times N}$ 。因此，在显著性目标检测中矩阵 F 被分解为低秩的背景 L 和稀疏的显著性目标 S 。

因此，刻画显著性目标检测的一般模型可以表示为：

$$\min_{L, S} f(L) + \alpha g(S) + \beta h(L, S) \quad s.t. \quad F = L + S。$$

其中，非显著性部分(即背景)具有低秩结构，见图 1.3.1。一般地， $f(L) = \|L\|_{S_q}^q$ 。

另一方面，为了充分地利用图像内在信息，我们建议用加权谱稀疏的矩阵范数来刻画显著性部分 S ，即

$$\wedge(S) = \sum_{j=1}^n v_j \|S_{G_j}\|_p，$$

其中 $S_{G_j} \in \mathfrak{R}^{D \times |G_j|}$ 是 S 的子矩阵， G_j 是图的第 j 个节点， v_j 是 G_j 先验权值，即

$$v_j = 1 - \max(\{\pi_k : k \in G_j\})，$$

$\|\cdot\|_p$ 是 l_p 范数。在文中，令 $p = \infty$ ， l_∞ 可以很好地捕获图像块在空间上的连续性和特征相似程度。如图 3.1 所示， $\wedge(S)$ 不仅可以保证相同组的图像块显著性值差异较小，同时可以使得不同组的显著性值差异明显。

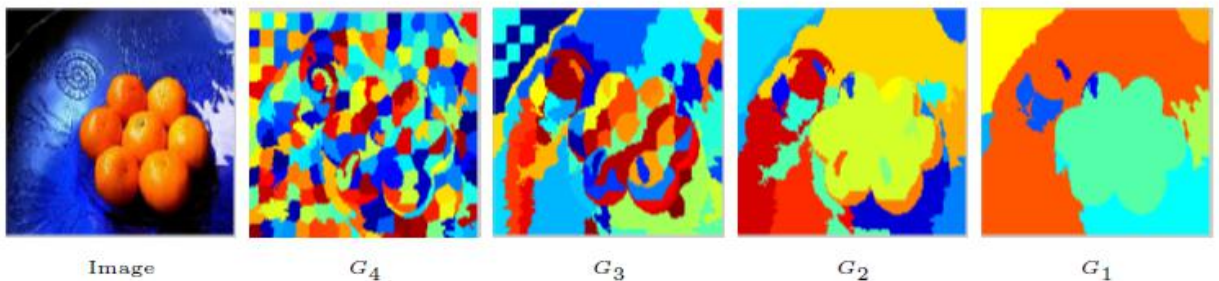


图 3.1 低秩和加权组稀疏的视觉效应

为了加大显著性目标 S 和背景 L 的差异，我们考虑拉普拉斯项 Q_F ：

$$(Q_F)_{i,j} = \begin{cases} -w_{ij} & i \neq j \\ \sum_{j \neq i} w_{i,j} & \text{otherwise} \end{cases},$$

其中 $w_{i,j}$ 用来度量图像块 (P_i, P_j) 之间的相似性, 即

$$w_{i,j} = \begin{cases} \exp\left(-\frac{\|f_i - f_j\|^2}{2\delta^2}\right) & (P_i, P_j) \in V, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases},$$

其中 V 是相邻图像块的集合。

综上所述, 新模型可以表示为:

$$\begin{aligned} \min_{L,S} \|L\|_{S_q}^q + \alpha \sum_{j=1}^n v_j \|S_{G_j}\|_{\infty} + \beta \text{Tr}(SQ_F S^T) \\ \text{s.t. } F = L + S \end{aligned}$$

由定理 2.5.1 知: 该模型可以转化为下列三个子问题, 即

(1) $q=1$ 时

$$\begin{aligned} \min_{U,V,L} \frac{1}{2} (\|U\|_F^2 + \|V\|_F^2) + \alpha \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{n_i} v_j^i \|S_{G_j^i}\|_p + \beta \text{Tr}(HM_F H^T) \\ \text{s.t. } F = UV^T + S, S = H \end{aligned}$$

(2) $q=2/3$ 时

$$\begin{aligned} \min_{U,V,L} \frac{1}{3} (2\|M\|_* + \|V\|_F^2) + \alpha \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{n_i} v_j^i \|S_{G_j^i}\|_p + \beta \text{Tr}(HM_F H^T) \\ \text{s.t. } F = UV^T + S, M = U, S = H \end{aligned}$$

(3) $q=1/2$ 时

$$\begin{aligned} \min_{U,V,L} \frac{1}{2} (\|M\|_* + \|N\|_*) + \alpha \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{n_i} v_j^i \|S_{G_j^i}\|_p + \beta \text{Tr}(HM_F H^T) \\ \text{s.t. } F = UV^T + S, M = U, N = V, S = H \end{aligned}$$

3.2 模型求解

根据 2.2 节的增广拉格朗日乘子法 ALM, 上面三个子问题可以改写为:

(1) $q=1$ 时

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(U, V, S, H, Y_1, Y_2, \mu) = & \frac{1}{2} (\|U\|_F^2 + \|V\|_F^2) + \alpha \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{n_i} \psi_j^i \|S_{G_j^i}\|_p + \beta \text{Tr}(HM_F H^T) + \\ & \langle Y_1, F - UV^T - S \rangle + \langle Y_2, S - H \rangle + \frac{\mu}{2} (\|F - UV^T - S\|_F^2 + \|S - H\|_F^2) \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

对于(3.2.1)，其基于 ADMM 的迭代算法为：

• 更新 U :

$$\begin{aligned} U^* &= \arg \min_U \frac{1}{2} \|U\|_F^2 + \langle Y_1, F - UV^T - S \rangle + \frac{\mu}{2} \|F - UV^T - S\|_F^2 \\ &= \arg \min_U \frac{1}{2} \|U\|_F^2 + \frac{\mu}{2} \left\langle 2 \frac{Y_1}{\mu}, F - UV^T - S \right\rangle + \frac{\mu}{2} \|F - UV^T - S\|_F^2 . \\ &= \arg \min_U \frac{1}{2} \|U\|_F^2 + \frac{\mu}{2} \|F - UV^T - S + \frac{Y_1}{\mu}\|_F^2 \end{aligned}$$

令 $J_1 = \frac{1}{2} \|U\|_F^2 + \frac{\mu}{2} \|F - UV^T - S + \frac{Y_1}{\mu}\|_F^2$ ，当 $\frac{dJ_1}{dU} = 0$ ，有

$$U - \mu(F - UV^T - S + \frac{Y_1}{\mu})V = 0 \Rightarrow U(I + \mu V^T V) = \mu FV + Y_1V - \mu SV ,$$

其中 $I \in \mathfrak{R}^{r \times r}$ 。于是，最优解可以表示为：

$$U^* = (\mu FV + Y_1V - \mu SV)(I + \mu V^T V)^{-1} . \quad (3.2.2)$$

• 更新 V :

$$\begin{aligned} V^* &= \arg \min_V \frac{1}{2} \|V\|_F^2 + \langle Y_1, F - UV^T - S \rangle + \frac{\mu}{2} \|F - UV^T - S\|_F^2 \\ &= \arg \min_V \frac{1}{2} \|V\|_F^2 + \frac{\mu}{2} \left\langle 2 \frac{Y_1}{\mu}, F - UV^T - S \right\rangle + \frac{\mu}{2} \|F - UV^T - S\|_F^2 . \\ &= \arg \min_V \frac{1}{2} \|V\|_F^2 + \frac{\mu}{2} \|F - UV^T - S + \frac{Y_1}{\mu}\|_F^2 \end{aligned}$$

令 $J_2 = \frac{1}{2} \|V\|_F^2 + \frac{\mu}{2} \|F - UV^T - S + \frac{Y_1}{\mu}\|_F^2$ ，当 $\frac{dJ_2}{dV} = 0$ ，有

$$V - \mu(F - UV^T - S + \frac{Y_1}{\mu})^T U = 0 \Rightarrow V(I + \mu U^T U) = \mu F^T U + Y_1^T U - \mu S^T U ,$$

其中 $I \in \mathfrak{R}^{r \times r}$ 。因此，相应的解为：

$$V^* = (\mu F^T U + Y_1^T U - \mu S^T U)(I + \mu U^T U)^{-1} . \quad (3.2.3)$$

• 更新 H :

$$\begin{aligned}
 H^* &= \arg \min_H \beta \langle H^T, M_F H^T \rangle + \langle Y_2, S - H \rangle + \frac{\mu}{2} \|S - H\|_F^2 \\
 &= \arg \min_H \beta \langle H^T, M_F H^T \rangle + \frac{\mu}{2} \left\langle 2 \frac{Y_2}{\mu}, S - H \right\rangle + \frac{\mu}{2} \|S - H\|_F^2 \\
 &= \arg \min_H \beta \text{Tr}(H M_F H^T) + \frac{\mu}{2} \|S - H + \frac{Y_2}{\mu}\|_F^2
 \end{aligned}$$

令 $J_3 = \beta \text{Tr}(H M_F H^T) + \frac{\mu}{2} \|S - H + \frac{Y_2}{\mu}\|_F^2$, 当 $\frac{dJ_3}{dH} = 0$, 有

$$\beta(H M_F^T + H M_F) - \mu(S - H + \frac{Y_2}{\mu}) = 0 \Rightarrow H(\beta M_F^T + \beta M_F + \mu I) = \mu S + Y_2,$$

其中 $I \in \mathfrak{R}^{N \times N}$ 。因此, 解可以表示为:

$$H^* = (\mu S + Y_2)(\beta M_F^T + \beta M_F + \mu I)^{-1}.$$

因为 M_F 是对称矩阵, 故解可以重写为:

$$H^* = (\mu S + Y_2)(2\beta M_F^T + \mu I)^{-1}. \quad (3.2.4)$$

• 更新 S :

$$\begin{aligned}
 S^* &= \arg \min_S \alpha \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{n_i} \|S_{G_j^i}\|_p + \langle Y_1, F - UV^T - S \rangle + \langle Y_2, S - H \rangle + \frac{\mu}{2} (\|F - UV^T - S\|_F^2 + \|S - H\|_F^2) \\
 &= \arg \min_S \alpha \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{n_i} \|S_{G_j^i}\|_p + \frac{\mu}{2} \left\langle 2 \frac{Y_1}{\mu}, F - UV^T - S \right\rangle + \frac{\mu}{2} \left\langle 2 \frac{Y_2}{\mu}, S - H \right\rangle + \frac{\mu}{2} (\|F - UV^T - S\|_F^2 + \|S - H\|_F^2) \\
 &= \arg \min_S \alpha \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{n_i} \|S_{G_j^i}\|_p + \frac{\mu}{2} (\|F - UV^T - S + \frac{Y_1}{\mu}\|_F^2 + \|S - H + \frac{Y_2}{\mu}\|_F^2)
 \end{aligned}$$

显然, 上式可以等价于:

$$\begin{aligned}
 S^* &= \arg \min_S \alpha \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{n_i} \|S_{G_j^i}\|_p + \frac{\mu}{2} (\|F - UV^T - S + \frac{Y_1}{\mu}\|_F^2 + \|S - H + \frac{Y_2}{\mu}\|_F^2) \\
 &= \arg \min_S \frac{\alpha}{\mu} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{n_i} \|S_{G_j^i}\|_p + \frac{1}{2} (\|S - F + UV^T - \frac{Y_1}{\mu}\|_F^2 + \|S - H + \frac{Y_2}{\mu}\|_F^2) \\
 &= \arg \min_S \frac{\alpha}{\mu} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{n_i} \|S_{G_j^i}\|_p + \|S - \frac{F - UV^T + \frac{Y_1}{\mu} + H - \frac{Y_2}{\mu}}{2}\|_F^2 \\
 &= \arg \min_S \frac{\alpha}{2\mu} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{n_i} \|S_{G_j^i}\|_p + \frac{1}{2} \|S - \frac{F - UV^T + H + \frac{Y_1 - Y_2}{\mu}}{2}\|_F^2
 \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

对于 S 的求解, 可以参考 [43] 的方法。

(2) $q = 2/3$ 时

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(U, V, S, M, H, Y_1, Y_2, Y_3, \mu) &= \frac{1}{3}(2\|M\|_* + \|V\|_F^2) + \alpha \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{n_i} \nu_j^i \|S_{G_j}\|_p + \\ &\beta \text{Tr}(HM_F H^T) + \langle Y_1, F - UV^T - S \rangle + \langle Y_2, M - U \rangle + \langle Y_3, S - H \rangle + \\ &\frac{\mu}{2} (\|F - UV^T - S\|_F^2 + \|M - U\|_F^2 + \|S - H\|_F^2) \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

• 更新 U :

$$\begin{aligned} U^* &= \arg \min_U \langle Y_1, F - UV^T - S \rangle + \langle Y_2, M - U \rangle + \frac{\mu}{2} (\|F - UV^T - S\|_F^2 + \|M - U\|_F^2) \\ &= \arg \min_U \frac{\mu}{2} (\|F - UV^T - S + \frac{Y_1}{\mu}\|_F^2 + \|M - U + \frac{Y_2}{\mu}\|_F^2) \end{aligned}$$

令 $J_1 = \|F - UV^T - S + \frac{Y_1}{\mu}\|_F^2 + \|M - U + \frac{Y_2}{\mu}\|_F^2$, 当 $\frac{dJ_1}{dU} = 0$, 有

$$-2(F - UV^T - S + \frac{Y_1}{\mu})V - 2(M - U + \frac{Y_2}{\mu}) = 0 \Rightarrow U(I + V^T V) = M + \frac{Y_2}{\mu} + FV + \frac{Y_1}{\mu}V - SV,$$

其中 $I \in \mathbb{R}^{r \times r}$ 。于是, 相应的解为:

$$U^* = (M + \frac{Y_2}{\mu} + FV + \frac{Y_1}{\mu}V - SV)(I + V^T V)^{-1}. \quad (3.2.7)$$

• 更新 V :

$$\begin{aligned} V^* &= \arg \min_V \frac{1}{3}\|V\|_F^2 + \langle Y_1, F - UV^T - S \rangle + \frac{\mu}{2}\|F - UV^T - S\|_F^2 \\ &= \arg \min_V \frac{1}{3}\|V\|_F^2 + \frac{\mu}{2} \left\langle 2 \frac{Y_1}{\mu}, F - UV^T - S \right\rangle + \frac{\mu}{2}\|F - UV^T - S\|_F^2 \\ &= \arg \min_V \frac{1}{3}\|V\|_F^2 + \frac{\mu}{2}\|F - UV^T - S + \frac{Y_1}{\mu}\|_F^2 \end{aligned}$$

令 $J_2 = \frac{1}{3}\|V\|_F^2 + \frac{\mu}{2}\|F - UV^T - S + \frac{Y_1}{\mu}\|_F^2$, 当 $\frac{dJ_2}{dV} = 0$, 有

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}V - \mu(F - UV^T - S + \frac{Y_1}{\mu})^T U &= 0 \Rightarrow \frac{2}{3}V - \mu F^T U + \mu V U^T U + \mu S^T U - Y_1^T U = 0 \\ &\Rightarrow V(\frac{2}{3}I + \mu U^T U) = \mu F^T U - \mu S^T U + Y_1^T U \end{aligned}$$

其中 $I \in \mathbb{R}^{r \times r}$ 。因此, 解可以表示为:

$$V^* = (\mu F^T U - \mu S^T U + Y_1^T U)(\frac{2}{3}I + \mu U^T U)^{-1}. \quad (3.2.8)$$

• 更新 M :

$$\begin{aligned}
 M^* &= \arg \min_M \frac{2}{3} \|M\|_* + \langle Y_2, M - U \rangle + \frac{\mu}{2} \|M - U\|_F^2 \\
 &= \arg \min_M \frac{2}{3} \|M\|_* + \frac{\mu}{2} \left\langle 2 \frac{Y_2}{\mu}, M - U \right\rangle + \frac{\mu}{2} \|M - U\|_F^2, \quad (3.2.9) \\
 &= \arg \min_M \frac{2}{3\mu} \|M\|_* + \frac{1}{2} \left\| U - \frac{Y_2}{\mu} - M \right\|_F^2
 \end{aligned}$$

对于(3.2.9)，我们可以利用定理 2.4.2 求解。

• 更新 H :

$$\begin{aligned}
 H^* &= \arg \min_H \beta \langle H^T, M_F H^T \rangle + \langle Y_2, S - H \rangle + \frac{\mu}{2} \|S - H\|_F^2 \\
 &= \arg \min_H \beta \text{Tr}(H M_F H^T) + \frac{\mu}{2} \|S - H + \frac{Y_2}{\mu}\|_F^2, \quad (3.2.10)
 \end{aligned}$$

于是，

$$H^* = (\mu S + Y_3)(2\beta M_F^T + \mu I)^{-1},$$

其中 $I \in \mathfrak{R}^{N \times N}$ 。

• 更新 S

$$\begin{aligned}
 S^* &= \arg \min_S \alpha \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{n_i} \|S_{G_j^i}\|_p + \langle Y_1, F - UV^T - S \rangle + \langle Y_3, S - H \rangle + \\
 &\quad \frac{\mu}{2} (\|F - UV^T - S\|_F^2 + \|S - H\|_F^2) \quad (3.2.11) \\
 &= \arg \min_S \frac{\alpha}{2\mu} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{n_i} \|S_{G_j^i}\|_p + \frac{1}{2} \|S - \frac{F - UV^T + H + \frac{Y_1 - Y_3}{\mu}}{2}\|_F^2
 \end{aligned}$$

同理， S 的求解依赖于文献 [43] 的方法。

(3) $q=1/2$ 时

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(U, V, S, M, N, H, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, \mu) &= \frac{1}{2} (\|M\|_* + \|N\|_*) + \alpha \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{n_i} v_j^i \|S_{G_j^i}\|_p + \\
 &\quad \beta \text{Tr}(H M_F H^T) + \langle Y_1, F - UV^T - S \rangle + \langle Y_2, M - U \rangle + \langle Y_3, N - V \rangle + \\
 &\quad \langle Y_4, S - H \rangle + \frac{\mu}{2} (\|F - UV^T - S\|_F^2 + \|M - U\|_F^2 + \|N - V\|_F^2 + \|S - H\|_F^2) \quad (3.2.12)
 \end{aligned}$$

• 更新 U

$$\begin{aligned}
 U^* &= \arg \min_U \langle Y_1, F - UV^T - S \rangle + \langle Y_2, M - U \rangle + \frac{\mu}{2} (\|F - UV^T - S\|_F^2 + \|M - U\|_F^2) \\
 &= \arg \min_U \frac{\mu}{2} \left\langle 2 \frac{Y_1}{\mu}, F - UV^T - S \right\rangle + \frac{\mu}{2} \left\langle 2 \frac{Y_2}{\mu}, M - U \right\rangle + \frac{\mu}{2} (\|F - UV^T - S\|_F^2 + \|M - U\|_F^2) \\
 &= \arg \min_U \frac{\mu}{2} (\|F - UV^T - S + \frac{Y_1}{\mu}\|_F^2 + \|M - U + \frac{Y_2}{\mu}\|_F^2) \\
 \text{令 } J_1 &= \|F - UV^T - S + \frac{Y_1}{\mu}\|_F^2 + \|M - U + \frac{Y_2}{\mu}\|_F^2, \text{ 当 } \frac{dJ_1}{dU} = 0 \text{ 时, 有} \\
 -2(F - UV^T - S + \frac{Y_1}{\mu})V - 2(M - U + \frac{Y_2}{\mu}) &= 0 \Rightarrow U(V^T V + I) = FV + \frac{Y_1}{\mu}V + M + \frac{Y_2}{\mu}SV,
 \end{aligned}$$

其中 $I \in \mathfrak{R}^{r \times r}$ 。因此, 相应的解为:

$$U^* = (FV + \frac{Y_1}{\mu}V + M + \frac{Y_2}{\mu}SV)(V^T V + I)^{-1}. \quad (3.2.13)$$

• 更新 V

$$\begin{aligned}
 V^* &= \arg \min_V \langle Y_1, F - UV^T - S \rangle + \langle Y_3, N - V \rangle + \frac{\mu}{2} (\|F - UV^T - S\|_F^2 + \|N - V\|_F^2) \\
 &= \arg \min_V \frac{\mu}{2} \left\langle 2 \frac{Y_1}{\mu}, F - UV^T - S \right\rangle + \frac{\mu}{2} \left\langle 2 \frac{Y_3}{\mu}, N - V \right\rangle + \frac{\mu}{2} (\|F - UV^T - S\|_F^2 + \|N - V\|_F^2) \\
 &= \arg \min_V \frac{\mu}{2} (\|F - UV^T - S + \frac{Y_1}{\mu}\|_F^2 + \|N - V + \frac{Y_3}{\mu}\|_F^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{令 } J_2 &= \|F - UV^T - S + \frac{Y_1}{\mu}\|_F^2 + \|N - V + \frac{Y_3}{\mu}\|_F^2, \text{ 当 } \frac{dJ_2}{dV} = 0 \text{ 时, 有} \\
 -2(F - UV^T - S + \frac{Y_1}{\mu})^T U - 2(N - V + \frac{Y_3}{\mu}) &= 0 \\
 \Rightarrow V(I + U^T U) &= N + \frac{Y_3}{\mu} + F^T U + \frac{Y_1^T}{\mu} U - S^T U,
 \end{aligned}$$

其中 $I \in \mathfrak{R}^{r \times r}$ 。因此, 解为:

$$V^* = (N + \frac{Y_3}{\mu} + F^T U + \frac{Y_1^T}{\mu} U - S^T U)(I + U^T U)^{-1}. \quad (3.2.14)$$

• 更新 M

$$\begin{aligned}
 M^* &= \arg \min_M \frac{1}{2} \|M\|_* + \langle Y_2, M - U \rangle + \frac{\mu}{2} \|M - U\|_F^2 \\
 &= \arg \min_M \frac{1}{2} \|M\|_* + \frac{\mu}{2} \left[\left\langle 2 \frac{Y_2}{\mu}, M - U \right\rangle + \|M - U\|_F^2 \right] \\
 &= \arg \min_M \frac{1}{2} \|M\|_* + \frac{\mu}{2} \|M - U + \frac{Y_2}{\mu}\|_F^2 \\
 &= \arg \min_M \frac{1}{2\mu} \|M\|_* + \frac{1}{2} \left\| \left(U - \frac{Y_2}{\mu} \right) - M \right\|_F^2
 \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

对于(3.2.15)，可以利用定理 2.4.2 求解。

• 更新 N

$$\begin{aligned}
 N^* &= \arg \min_N \frac{1}{2} \|N\|_* + \langle Y_3, N - V \rangle + \frac{\mu}{2} \|N - V\|_F^2 \\
 &= \arg \min_N \frac{1}{2} \|N\|_* + \frac{\mu}{2} \left\langle 2 \frac{Y_3}{\mu}, N - V \right\rangle + \frac{\mu}{2} \|N - V\|_F^2 \\
 &= \arg \min_N \frac{1}{2} \|N\|_* + \frac{\mu}{2} \left\| N - V + \frac{Y_3}{\mu} \right\|_F^2 \\
 &= \arg \min_N \frac{1}{2\mu} \|N\|_* + \frac{1}{2} \left\| V - \frac{Y_3}{\mu} - N \right\|_F^2
 \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

类似地，利用定理 2.4.2 求解(3.2.16)。

• 更新 H

$$\begin{aligned}
 H^* &= \arg \min_H \beta \langle H^T, M_F H^T \rangle + \langle Y_2, S - H \rangle + \frac{\mu}{2} \|S - H\|_F^2 \\
 &= \arg \min_H \beta \text{Tr}(H M_F H^T) + \frac{\mu}{2} \|S - H + \frac{Y_2}{\mu}\|_F^2
 \end{aligned}$$

于是，解为：

$$H^* = (\mu S + Y_4)(2\beta M_F^T + \mu I)^{-1}, \tag{3.2.17}$$

其中 $I \in \mathfrak{R}^{N \times N}$ 。

• 更新 S

$$\begin{aligned}
 S^* &= \arg \min_S \alpha \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{n_j} \|S_{G_j^i}\|_p + \langle Y_1, F - UV^T - S \rangle + \langle Y_4, S - H \rangle + \\
 &\quad \frac{\mu}{2} (\|F - UV^T - S\|_F^2 + \|S - H\|_F^2)
 \end{aligned}$$

相应的最优解为：

$$S^* = \arg \min_S \frac{\alpha}{2\mu} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{n_i} \|S_{G_j^i}\|_p + \frac{1}{2} \left\| S - \frac{F - UV^T + H + \frac{Y_1 - Y_4}{\mu}}{2} \right\|_F^2. \quad (3.2.18)$$

对于(3.2.18)，可以采用文献[43]的方法。

3.3 算法

在这一部分，详细概括 S 的求解算法 3.3.1 及新模型基于 ADMM 的算法 3.3.2, 3.3.3 和 3.3.4。

算法 3.3.1 通过谱最近邻算子求解 S

输入: F 和 γ

- 1: 设定 $S = A$
- 2: *for* $i = d : 1$
- 3: *for* $j = 1 : n$

$$4: \quad S_{G_j}^{k+1} = \begin{cases} \frac{\|S_{G_j}\|_1 - \gamma v_j}{\|S_{G_j}\|} S_{G_j} & \text{if } \|S_{G_j}\| > \gamma v_j \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

- 5: *end for*
- 6: *end for*

输出: S^k

算法 3.3.2 通过 ADMM 求解问题 (3.2.1)

输入: $F, d, \alpha, \beta, \mu_0$, 和 $S_0 = H_0 = Y_1^0 = Y_2^0 = 0, \mu_{max} = 10^{10}, \rho = 1.1, k = 0$

- 1 *while* 不收敛 *do*
 - 2 利用式(3.2.2) 更新 U_{k+1}
 - 3 利用式(3.2.3) 更新 V_{k+1}
 - 4 利用式(3.2.4) 更新 S_{k+1}
 - 5 利用式(3.2.5) 更新 H_{k+1}
 - 6 利用 $Y_1 \leftarrow Y_1 + \mu(F - UV^T - S)$ 更新 Y_1^{k+1}
 - 7 利用 $Y_2 \leftarrow Y_2 + \mu(S - H)$ 更新 Y_2^{k+1}
-

- 8 利用 $\mu \leftarrow \min(\rho\mu, \mu_{\max})$ 更新 μ_{k+1}
- 9 利用 $k \leftarrow k+1$ 更新 k
- 10 *end while*

输出: U, V, S

算法 3.3.3 通过 *ADMM* 求解问题 (3.2.6)

输入: $F, d, \alpha, \beta, \mu_0$, 和 $M_0 = Y_2^0 = 0, S_0 = H_0 = Y_1^0 = Y_3^0 = 0, \mu_{\max} = 10^{10}, \rho = 1.1, k = 0$

- 1 *while* 不收敛 *do*
- 2 利用式(3.2.7) 更新 U_{k+1}
- 3 利用式(3.2.8) 更新 V_{k+1}
- 4 利用式(3.2.9) 更新 M_{k+1}
- 5 利用式(3.2.10) 更新 H_{k+1}
- 6 利用式(3.2.11) 更新 S_{k+1}
- 7 利用 $Y_1 \leftarrow Y_1 + \mu(F - UV^T - S)$ 更新 Y_1^{k+1}
- 8 利用 $Y_2 \leftarrow Y_2 + \mu(M - U)$ 更新 Y_2^{k+1}
- 9 利用 $Y_3 \leftarrow Y_3 + \mu(S - H)$ 更新 Y_3^{k+1}
- 10 利用 $\mu \leftarrow \min(\rho\mu, \mu_{\max})$ 更新 μ_{k+1}
- 11 利用 $k \leftarrow k+1$ 更新 k
- 12 *end while*

输出: U, V, S

算法 3.3.4 通过 *ADMM* 求解问题 (3.2.12)

输入: $M_0 = Y_2^0 = 0, N_0 = Y_3^0 = 0, S_0 = H_0 = Y_1^0 = Y_4^0 = 0, \mu_{\max} = 10^{10}, \rho = 1.1, k = 0$

- 1 *while* 不收敛 *do*
- 2 利用式(3.2.13) 更新 U_{k+1}
- 3 利用式(3.2.14) 更新 V_{k+1}

- 4 利用式(3.2.15) 更新 M_{k+1}
- 5 利用式(3.2.16) 更新 N_{k+1}
- 6 利用式(3.2.17) 更新 H_{k+1}
- 7 利用式(3.2.18) 更新 S_{k+1}
- 8 利用 $Y_1 \leftarrow Y_1 + \mu(F - UV^T - S)$ 更新 Y_1^{k+1}
- 9 利用 $Y_2 \leftarrow Y_2 + \mu(M - U)$ 更新 Y_2^{k+1}
- 10 利用 $Y_3 \leftarrow Y_3 + \mu(N - V)$ 更新 Y_3^{k+1}
- 11 通过 $Y_3 \leftarrow Y_3 + \mu(N - V)$ 更新 Y_3^{k+1}
- 12 通过 $\mu \leftarrow \min(\rho\mu, \mu_{\max})$ 更新 μ_{k+1}
- 13 通过 $k \leftarrow k+1$ 更新 k
- 14 *end while*

输出: U, V, S

3.4 收敛性分析

由上述算法可知, 每个子问题都有闭式解。由于这三个算法 3.3.2, 3.3.3 和 3.3.4 具有相似的迭代步骤, 因此我们就最复杂的算法 3.3.4 进行收敛性分析。

定理 3.4.1 : $\{U_k\}, \{V_k\}, \{S_k\}, \{M_k\}, \{N_k\}, \{H_k\}$ 是算法 3.3.4 生成的序列, 若序列

$\{Y_i^k\} (1 \leq i \leq 4)$ 有界, 且 μ_k 非递减且满足 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_{k+1}}{\mu_k^2} < \infty$ 。那么, 序列 $\{U_k\}, \{V_k\}, \{S_k\}, \{M_k\},$

$\{N_k\}, \{H_k\}$ 有界。

证明: 令 $X_k \triangleq (U_k, V_k, S_k, M_k, N_k, H_k)$, $Y^k \triangleq (Y_1^k, Y_2^k, Y_3^k, Y_4^k)$ 。根据算法的迭代格式, 有

$$\min_X \mathcal{L}_{1/2}(X, Y^k, \mu_k) = \mathcal{L}_{1/2}(X_{k+1}, Y^k, \mu_k)。$$

于是, 相应的不等式为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1/2}(X_{k+1}, Y^k, \mu_k) &\leq \mathcal{L}_{1/2}(X_k, Y^k, \mu_k) \\ &= \mathcal{L}_{1/2}(X_k, Y^{k-1}, \mu_{k-1}) + \frac{\mu_k + \mu_{k-1}}{2(\mu_{k-1})^2} \sum_{i=1}^4 \|Y_i^k - Y_i^{k-1}\|_F^2 \end{aligned}$$

又由于 $\mu_{k+1} = \rho\mu_{k-1}$, $\rho > 1$ 和 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k}{\mu_{k+1}^2} < \infty$, 且 μ_k 是非递减的, 因此, 我们有

$$\frac{\mu_k + \mu_{k-1}}{2(\mu_{k-1})^2} \leq \frac{2\mu_k}{2(\mu_{k-1})^2} = \frac{\mu_k}{(\mu_{k-1})^2} \rightarrow 0。$$

于是, $\mathcal{L}_{1/2}((X_{k+1}, Y^k, \mu_k))$ 有上界。

又知式 (3.2.12) 可以表示为:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\|M_k\|_* + \|N_k\|_*) + \alpha \sum_{j=1}^n \nu_j \|S_{G_j}^k\|_{\infty} + \beta \text{Tr}(HQ_F H^T) \\ & = \mathcal{L}_{1/2}(X_k, Y^{k-1}, \mu_{k-1}) - \frac{3}{2\mu_{k-1}} \sum_{i=1}^4 (\|Y_i^k\|_F^2 - \|Y_i^{k-1}\|_F^2) \end{aligned}$$

因此, $\{M_k\}, \{N_k\}, \{S_k\}$ 分别有界。同理, $\{U_k\}, \{V_k\}, \{H_k\}$ 也分别有界。□

定理 3.4.2 : $\{U_k\}, \{V_k\}, \{S_k\}, \{M_k\}, \{N_k\}, \{H_k\}$ 是算法 3.3.4 生成的序列, 若序列 $\{Y_i^k\} (1 \leq i \leq 4)$ 有界, 且 μ_k 非递减且满足 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_{k+1}}{\mu_k^2} < \infty$ 。那么, 序列

$\{U_k\}, \{V_k\}, \{S_k\}, \{M_k\}, \{N_k\}, \{H_k\}$ 都是 Cauchy 列。

证明: 因为

$$M_{k+1} - U_{k+1} = \frac{Y_2^{k+1} - Y_2^k}{\mu_k},$$

根据定理 3.4.1, 有

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|M_{k+1} - U_{k+1}\|_F = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} \|Y_2^{k+1} - Y_2^k\|_F \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_{k+1}}{\mu_k^2} \|Y_2^{k+1} - Y_2^k\|_F < \infty,$$

于是, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|M_{k+1} - U_{k+1}\|_F = 0$ 。另一方面, 拉格朗日乘子可以改写为

$$Y_1^k = Y_1^{k-1} + \mu_{k-1} (F - U_k V_k^T - S_k) \Rightarrow F - S_k = U_k V_k^T + \frac{Y_1^k - Y_1^{k-1}}{\mu_{k-1}}。$$

因此, 更新 U 就可以转化为求解该问题对 U 的一阶偏导数为 0, 即

$$\left(F - U_{k+1} V_k^T - S_k + \frac{Y_1^k}{\mu_k} \right) V_k + \left(M_k - U_{k+1} + \frac{Y_2^k}{\mu_k} \right) = 0。$$

于是,

$$(U_k - U_{k+1})(V_k^T V_k + I) - Z = 0,$$

其中 $Z = \begin{pmatrix} \frac{Y_1^{k-1} - Y_1^k}{\mu_{k-1}} - \frac{Y_1^k}{\mu_k} \\ \frac{Y_2^{k-1} - Y_2^k}{\mu_{k-1}} - \frac{Y_2^k}{\mu_k} \end{pmatrix} V_k + \frac{Y_1^{k-1} - Y_1^k}{\mu_{k-1}} - \frac{Y_1^k}{\mu_k}$ 。因此，上式就简化为

$$U_k - U_{k+1} = Z (V_k^T V_k + I)^{-1}。$$

于是，我们得到

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \|U_{k+1} - U_k\|_F \\ & \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\|Y_1^{k-1} - Y_1^k\|_F \|V_k\|_F}{\mu_{k-1}} + \frac{\|Y_1^k\|_F \|V_k\|_F}{\mu_k} + \frac{\|Y_2^{k-1} - Y_2^k\|_F}{\mu_{k-1}} + \frac{\|Y_2^k\|_F}{\mu_k} \right) \|(V_k^T V_k + I)^{-1}\|_F。 \\ & \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\|Y_1^{k-1} - Y_1^k\|_F \|V_k\|_F}{\mu_{k-1}} + \frac{\|Y_1^k\|_F \|V_k\|_F}{\mu_{k-1}} + \frac{\|Y_2^{k-1} - Y_2^k\|_F}{\mu_{k-1}} + \frac{\|Y_2^k\|_F}{\mu_{k-1}} \right) \|(V_k^T V_k + I)^{-1}\|_F \end{aligned}$$

令 $\theta = \max \left\{ \left(\|Y_1^{k-1} - Y_1^k\|_F \|V_k\|_F + Z_1 \right) Z_2 \right\}_{k=1}^{\infty}$ ， $Z_1 = \|Y_1^k\|_F \|V_k\|_F + \|Y_2^{k-1} - Y_2^k\|_F \|Y_2^k\|_F$ 和

$Z_2 = \|(V_k^T V_k + I)^{-1}\|_F$ ，我们有

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|U_k - U_{k+1}\|_F \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} \theta \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_{k+1}}{\mu_k^2} \theta < \infty,$$

这也就说 $\{U_k\}$ 是 Cauchy 列。

同理，我们可以证明 $\{V_k\}, \{S_k\}, \{M_k\}, \{N_k\}, \{H_k\}$ 分别都是 Cauchy 列。□

3.5 数值实验

这部分，我们列举新方法和目前 12 种经典的方法作比较的结果。其中，包括四种低秩方法即 DIMD [41]，SMD [15]，SLR [29]，ULR [28]；八种最新的非低秩方法，分别是 GS [32]，HS [23]，PCA [24]，TD [25]，DRFI [17]，RBD [18]。

在实验中，利用四层深度的组稀疏结构。并且令 $\sigma^2 = 0.05$ ， $d = 25$ 。另外，当 $p = 1$ 时， $\alpha = 0.3$ ， $\beta = 0.925$ ；当 $p = 2/3$ 时， $\alpha = 0.04$ ， $\beta = 0.6$ ；当 $p = 1/2$ 时， $\alpha = 0.06$ ， $\beta = 0.1125$ 。

表 3.1 和表 3.2 给出新模型与四种低秩方法的比较。由这些数据可知：新模型在数据集 ECSSD，PASCAL_S，iCoSeg 和 MSRA10K 上获得最好的评价指标，见 WF，OR，AUC 和 MAE。

表 3.3 和表 3.4 给出新模型与八种非低秩方法的比较。显然，新模型优于其他方法。

图 3.2 给出新方法在六个数据集上的 F-度量曲线。显而易见，新方法取得比较理想

的结果。

图 3.3 给出新方法检测的视觉效果。从大量的实验结果可以看出：新方法比其他方法检测到的显著目标更完整，更准确，更接近 Ground truth。

3.6 本章小结

本章构造了一种非凸低秩谱稀疏矩阵分解引导的图像显著性检测模型。在该模型中，我们建议用非凸 Shatten- p ($p=1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$) 范数刻画背景，用加权组稀疏刻画显著性目标。为了加大背景与显著性目标的差异，我们采用拉普拉斯正则项。对于模型求解，本章给出基于 ADMM 的快速算法和相应的收敛性分析。大量的数值实验表明：新方法不仅取得最好的评判指标，同时给出最佳的视觉效果。

表 3.1 与其他低秩方法在不同数据集上的性能比较 I

Dataset	ECSSD				THUR15K				PASCAL-S			
Metric	WF \uparrow	OR \uparrow	AUC \uparrow	MAE \downarrow	WF \uparrow	OR \uparrow	AUC \uparrow	MAE \downarrow	WF \uparrow	OR \uparrow	AUC \uparrow	MAE \downarrow
ULR	0.351	0.347	0.755	0.312	0.259	0.325	0.801	0.249	0.351	0.295	0.718	0.320
SLR	0.442	0.474	0.764	0.252	0.387	0.433	0.823	0.167	0.398	0.390	0.711	0.275
DIMD	0.534	0.548	0.819	0.181	0.430	0.458	0.829	0.166	0.500	0.451	0.738	0.245
SMD	0.517	0.523	0.775	0.227	0.434	0.466	0.823	0.159	0.486	0.446	0.730	0.246
Ours $q=1$	0.542	0.563	0.813	0.174	0.436	0.466	0.824	0.160	0.494	0.447	0.733	0.245
Ours $q=2/3$	0.542	0.562	0.813	0.173	0.435	0.463	0.825	0.163	0.500	0.449	0.734	0.244
Ours $q=1/2$	0.540	0.554	0.820	0.179	0.432	0.459	0.831	0.167	0.503	0.453	0.740	0.245

The \uparrow indicates the larger value achieved, the better performance is, while \downarrow indicates the smaller, the better.

表 3.2 与其他低秩方法在不同数据集上的性能比较 II

Dataset	iCoSeg				MSRA10K				DUT-OMRON			
Metric	WF \uparrow	OR \uparrow	AUC \uparrow	MAE \downarrow	WF \uparrow	OR \uparrow	AUC \uparrow	MAE \downarrow	WF \uparrow	OR \uparrow	AUC \uparrow	MAE \downarrow
ULR	0.379	0.443	0.814	0.222	0.425	0.524	0.831	0.141	0.254	0.318	0.805	0.260
SLR	0.473	0.505	0.805	0.179	0.601	0.691	0.840	0.224	0.392	0.429	0.822	0.161
DIMD	0.603	0.594	0.827	0.141	0.761	0.733	0.836	0.087	0.398	0.415	0.807	0.183
SMD	0.611	0.598	0.822	0.138	0.704	0.741	0.847	0.104	0.424	0.441	0.809	0.166
Ours $q=1$	0.613	0.597	0.824	0.138	0.701	0.741	0.848	0.105	0.422	0.440	0.812	0.170
Ours $q=2/3$	0.626	0.608	0.829	0.133	0.705	0.744	0.848	0.103	0.423	0.440	0.812	0.171
Ours $q=1/2$	0.612	0.600	0.833	0.139	0.695	0.734	0.852	0.109	0.405	0.424	0.815	0.183

The \uparrow indicates the larger value achieved, the better performance is, while \downarrow indicates the smaller, the better.

表 3.3 与其他非低秩方法在不同数据集上的性能比较 I

Dataset	ECSSD				THUR15K				PASCAL-S			
	WF ↑	OR ↑	AUC ↑	MAE ↓	WF ↑	OR ↑	AUC ↑	MAE ↓	WF ↑	OR ↑	AUC ↑	MAE ↓
PCA	0.358	0.371	0.759	0.291	0.298	0.362	0.822	0.198	0.353	0.352	0.719	0.296
GS	0.436	0.435	0.758	0.255	0.370	0.387	0.814	0.176	0.456	0.418	0.734	0.262
HS	0.449	0.432	0.766	0.269	0.365	0.402	0.801	0.218	0.451	0.349	0.733	0.286
MC	0.441	0.495	0.779	0.251	0.349	0.444	0.834	0.184	0.423	0.412	0.740	0.272
MR	0.480	0.491	0.761	0.235	0.378	0.426	0.796	0.178	0.446	0.431	0.722	0.265
DSR	0.489	0.480	0.754	0.227	0.423	0.426	0.803	0.142	0.439	0.409	0.712	0.258
RBD	0.490	0.494	0.752	0.225	0.421	0.431	0.804	0.150	0.474	0.442	0.725	0.247
DRFI	0.517	0.527	0.780	0.217	0.432	0.481	0.856	0.147	0.449	0.432	0.749	0.258
Ours	0.542	0.562	0.813	0.173	0.435	0.463	0.825	0.163	0.500	0.449	0.734	0.244

The ↑ indicates the larger value achieved, the better performance is, while ↓ indicates the smaller, the better.
The best three results are highlighted with red, green and blue fonts, respectively, Ours $q = 2/3$.

表 3.4 与其他非低秩方法在不同数据集上的性能比较 II

Dataset	iCoSeg				MSRA10K				DUT-OMRON			
	WF ↑	OR ↑	AUC ↑	MAE ↓	WF ↑	OR ↑	AUC ↑	MAE ↓	WF ↑	OR ↑	AUC ↑	MAE ↓
PCA	0.407	0.427	0.798	0.201	0.473	0.576	0.839	0.185	0.287	0.341	0.827	0.207
GS	0.519	0.520	0.819	0.167	0.606	0.664	0.839	0.139	0.363	0.372	0.814	0.173
HS	0.536	0.537	0.812	0.176	0.604	0.656	0.833	0.149	0.350	0.397	0.801	0.227
MC	0.461	0.543	0.807	0.179	0.576	0.694	0.843	0.145	0.347	0.425	0.820	0.186
MR	0.554	0.573	0.795	0.162	0.642	0.693	0.824	0.125	0.381	0.420	0.779	0.187
DSR	0.548	0.514	0.801	0.153	0.656	0.654	0.825	0.121	0.419	0.408	0.803	0.139
RBD	0.599	0.588	0.827	0.138	0.685	0.716	0.834	0.108	0.427	0.432	0.814	0.144
DRFI	0.592	0.582	0.839	0.139	0.666	0.723	0.857	0.114	0.424	0.444	0.839	0.138
Ours	0.626	0.608	0.829	0.133	0.705	0.744	0.848	0.103	0.423	0.440	0.812	0.171

The ↑ indicates the larger value achieved, the better performance is, while ↓ indicates the smaller, the better.
The best three results are highlighted with red, green and blue fonts, respectively, Ours $q = 2/3$.

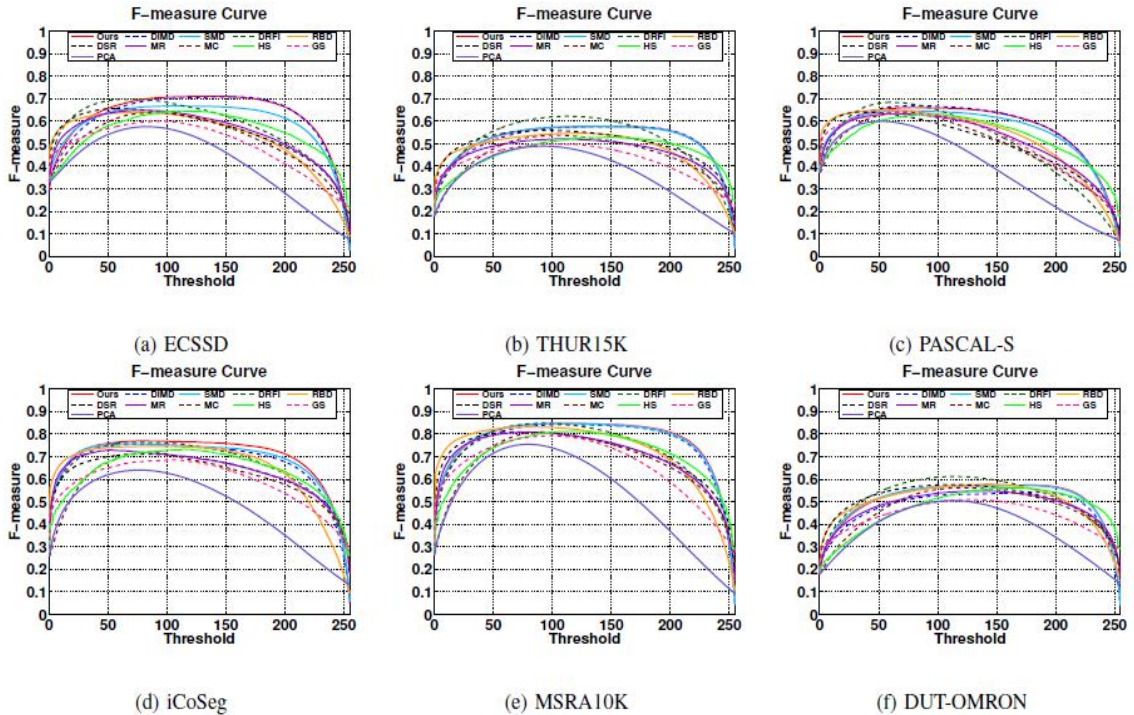


图 3.2 F-度量曲线

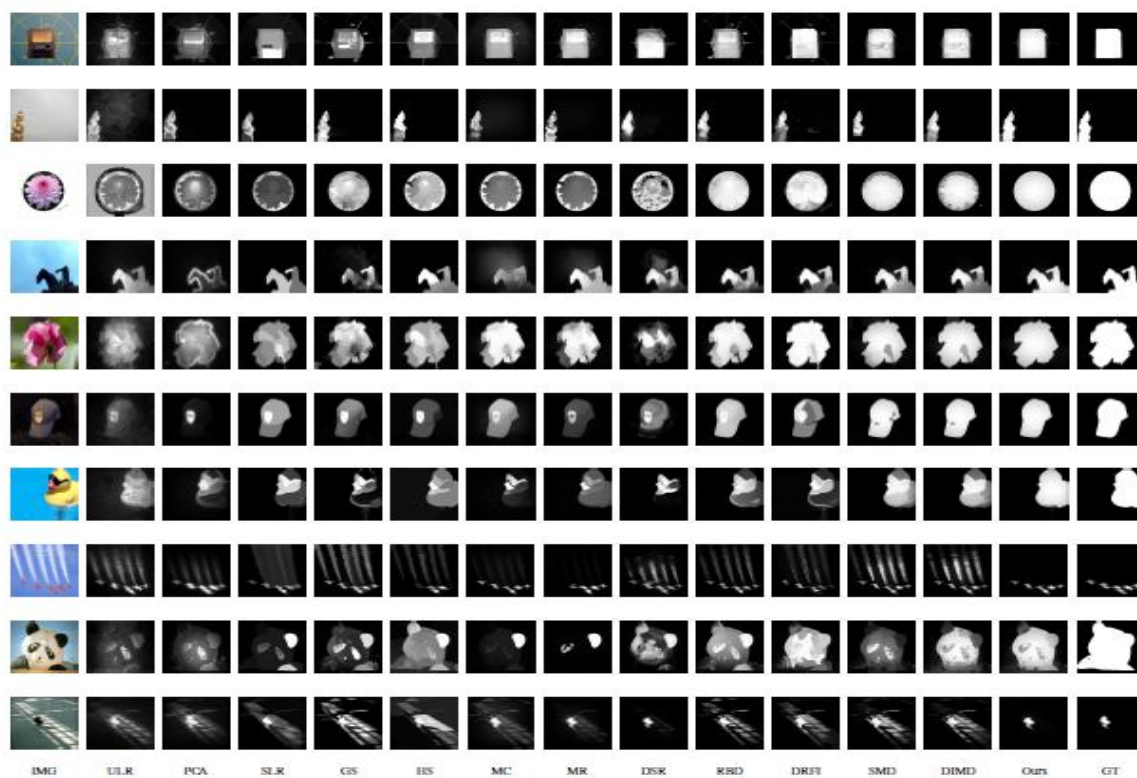


图 3.3 不同方法的视觉比较，其中 IMG 代表图像，GT 代表显著性目标标注。

第 4 章 一种基于双因子矩阵分解的非凸图像显著性检测模型

4.1 建立模型

已知自然图像 I ，利用过分割技术把它分成 N 块 $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_N\}$ 。对于每一个图像块 P_i ， D 维的底层视觉向量为 $f_i \in \mathfrak{R}^D$ 。于是，生成图像 I 的特征矩阵为 $F = [f_1, f_2, \dots, f_N] \in \mathfrak{R}^{D \times N}$ 。因此，在显著性目标检测中矩阵 F 被分解为低秩的背景 L 和稀疏的显著性目标 S 。

于是，我们建立如下的显著性检测模型：

$$\begin{aligned} \min_{L, S} \quad & \|L\|_{S_{2/3}}^{2/3} + \lambda \|S\|_{l_{2/3}}^{2/3} + \gamma \text{Tr}(SQ_F S^T) \\ \text{s.t.} \quad & F = L + S \end{aligned}$$

其中 $\|L\|_{S_{2/3}}^{2/3} = \left(\sum_{i=1}^{\min\{m, n\}} \sigma_i^{2/3} \right)$ ， σ_i 是给定矩阵 L 的奇异值。 $\|S\|_{l_{2/3}}^{2/3} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m |s_{ij}|^{2/3}$ ， $\text{Tr}(SQ_F S^T)$ 是拉普拉斯项，即

$$(Q_F)_{i,j} = \begin{cases} -w_{ij} & i \neq j \\ \sum_{j \neq i} w_{i,j} & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中 $w_{i,j}$ 用来度量图像块 (P_i, P_j) 之间的相似性，即

$$w_{i,j} = \begin{cases} \exp\left(-\frac{\|f_i - f_j\|^2}{2\delta^2}\right) & (P_i, P_j) \in V \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中 V 是相邻图像块的集合。

根据定理 2.5.1，上述新模型可以重写为：

$$\begin{aligned} \min_{U, V, S} \quad & \frac{1}{3} (2\|V\|_* + \|U\|_F^2) + \lambda \|S\|_{l_{2/3}}^{2/3} + \gamma \text{Tr}(SQ_F S^T) \\ \text{s.t.} \quad & F = L + S, L = UV^T \end{aligned}$$

为了计算方便，我们引入中间变量 M, H 。于是，新模型为

$$\begin{aligned} \min_{U, V, S, M, H} \quad & \frac{1}{3} (2\|M\|_* + \|V\|_F^2) + \lambda \|S\|_{l_{2/3}}^{2/3} + \gamma \text{Tr}(HQ_F H^T) \\ \text{s.t.} \quad & F = L + S, L = UV^T, M = U, S = H \end{aligned}$$

4.2 模型求解

利用增广拉格朗日乘子法，上述模型改写为：

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{2/3}(U, V, L, S, M, H, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, \mu) = & \frac{1}{3} \left(2 \|M\|_* + \|V\|_F^2 \right) + \lambda \|S\|_{2/3}^{2/3} \\
 & + \gamma \text{Tr}(HQ_F H^T) + \langle Y_1, F - L - S \rangle + \langle Y_2, L - UV^T \rangle \\
 & + \langle Y_3, M - U \rangle + \langle Y_4, S - H \rangle + \\
 & + \frac{\mu}{2} \left(\|F - L - S\|_F^2 + \|L - UV^T\|_F^2 + \|M - U\|_F^2 + \|S - H\|_F^2 \right)
 \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

对于(4.2.1)的求解，其基于 ADMM 交替方向乘子算法可以概括为下列步骤。

• 更新 U

$$\begin{aligned}
 U^* = \arg \min_U & \langle Y_2, L - UV^T \rangle + \langle Y_3, M - U \rangle + \frac{\mu}{2} \left(\|L - UV^T\|_F^2 + \|M - U\|_F^2 \right) \\
 = \arg \min_U & \left\| L - UV^T + \frac{Y_2}{\mu} \right\|_F^2 + \left\| M - U + \frac{Y_3}{\mu} \right\|_F^2
 \end{aligned}$$

令 $J_1 = \left\| L - UV^T + \frac{Y_2}{\mu} \right\|_F^2 + \left\| M - U + \frac{Y_3}{\mu} \right\|_F^2$ ，当 $\frac{\partial J_1}{\partial U} = 0$ 时，有

$$LV - UV^T V + \frac{Y_2 V}{\mu} + M - U + \frac{Y_3}{\mu} = 0 \Rightarrow U (V^T V + I) = LV + M + \frac{Y_2 V + Y_3}{\mu},$$

其中 $I \in \mathfrak{R}^{r \times r}$ 。所以，最优解为：

$$U^* = \left(LV + M + \frac{Y_2 V + Y_3}{\mu} \right) (V^T V + I)^{-1}. \tag{4.2.2}$$

• 更新 V

$$\begin{aligned}
 V^* = \arg \min_V & \frac{1}{3} \|V\|_F^2 + \langle Y_2, L - UV^T \rangle + \frac{\mu}{2} \|L - UV^T\|_F^2 \\
 = \arg \min_V & \frac{1}{3} \|V\|_F^2 + \frac{\mu}{2} \left\| L - UV^T + \frac{Y_2}{\mu} \right\|_F^2
 \end{aligned}$$

令 $J_2 = \frac{1}{3} \|V\|_F^2 + \frac{\mu}{2} \left\| L - UV^T + \frac{Y_2}{\mu} \right\|_F^2$ ，当 $\frac{\partial J_2}{\partial V} = 0$ 时，有

$$\frac{2}{3} V - \mu L^T U + \mu V U^T U - Y_2^T U = 0 \Rightarrow V \left(\frac{2}{3} I + \mu U^T U \right) = \mu L^T U + Y_2^T U,$$

其中 $I \in \mathfrak{R}^{r \times r}$ 。因此，解为：

$$V = (\mu L^T U + Y_2^T U) \left(\frac{2}{3} I + \mu U^T U \right)^{-1}. \quad (4.2.3)$$

• 更新 L

$$\begin{aligned} L^* &= \arg \min_L \langle Y_1, F - L - S \rangle + \langle Y_2, L - UV^T \rangle + \frac{\mu}{2} \left(\|F - L - S\|_F^2 + \|L - UV^T\|_F^2 \right) \\ &= \arg \min_L \left\| F - L - S + \frac{Y_1}{\mu} \right\|_F^2 + \left\| L - UV^T + \frac{Y_2}{\mu} \right\|_F^2 \end{aligned}$$

令 $J_3 = \left\| F - L - S + \frac{Y_1}{\mu} \right\|_F^2 + \left\| L - UV^T + \frac{Y_2}{\mu} \right\|_F^2$, 当 $\frac{\partial J_3}{\partial L} = 0$ 时, 有

$$L + S - F - \frac{Y_1}{\mu} + L - UV^T + \frac{Y_2}{\mu} = 0.$$

于是, 相应的解为

$$L = \frac{1}{2} \left(F + UV^T - S + \frac{Y_1 - Y_2}{\mu} \right). \quad (4.2.4)$$

• 更新 S

$$\begin{aligned} S^* &= \arg \min_S \lambda \|S\|_{l_{2/3}}^{2/3} + \langle Y_1, F - L - S \rangle + \langle Y_4, S - H \rangle \\ &\quad + \frac{\mu}{2} \left(\|F - L - S\|_F^2 + \|S - H\|_F^2 \right) \\ &= \arg \min_S \frac{\lambda}{\mu} \|S\|_{l_{2/3}}^{2/3} + \left\| S - \left(\frac{F - L + H}{2} + \frac{Y_1 - Y_4}{2\mu} \right) \right\|_F^2 \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

对于(4.2.5)的求解, 我们可以概括为定理 4.2.1。即

定理 4.2.1 [10] 已知矩阵 $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ 和 $X \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, 则优化问题

$$\min_X \|X - A\|_F^2 + \tau \|X\|_{l_{2/3}}^{2/3}$$

的解为 $\mathcal{T}(A)$, 其形式为

$$\mathcal{T}_\tau(a) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sgn}(a) \left(\varphi_\tau(a) + \sqrt{\frac{2|a|}{\varphi_\tau(a)} - \varphi_\tau^2(a)} \right)^3}{8} & |a| > \frac{2\sqrt[4]{3\tau^3}}{3}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中

$$\varphi_{\tau}(a) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\sqrt{\tau} \cosh \left(\operatorname{arccosh} \left(\frac{\left(\frac{27a^2}{16} \tau^{-\frac{3}{2}} \right)}{3} \right) \right)}.$$

• 更新 M

$$\begin{aligned} M^* &= \arg \min_M \frac{1}{3} (2 \|M\|_*) + \langle Y_3, M - U \rangle + \frac{\mu}{2} \left\| M - U + \frac{Y_3}{\mu} \right\|_F^2 \\ &= \arg \min_M \frac{2}{3\mu} \|M\|_* + \frac{1}{2} \left\| M - \left(U - \frac{Y_3}{\mu} \right) \right\|_F^2 \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

对于(4.2.6)的求解，我们可以利用定理 2.4.2 给出最优解。

• 更新 H

$$\begin{aligned} H^* &= \arg \min_H \gamma \operatorname{Tr} H Q_F H^T + \langle Y_4, S - H \rangle + \frac{\mu}{2} \|S - H\|_F^2 \\ &= \arg \min_H \gamma \langle H^T, Q_F H^T \rangle + \frac{\mu}{2} \left\| S - H + \frac{Y_4}{\mu} \right\|_F^2 \end{aligned}$$

所以，最优解为

$$H^* = (\mu S + Y_4)(2\gamma Q_F + \mu I)^{-1}. \quad (4.2.7)$$

4.3 算法

在这一部分，主要介绍新模型基于 ADMM 的算法 4.3.1。

算法 4.3.1 通过 ADMM 求解问题 (4.2.1)

输入 F, d, α, β, μ 和 $M_0 = Y_2^0 = 0, N_0 = Y_3^0 = 0, S_0 = H_0 = Y_1^0 = Y_4^0 = 0, \mu_{\max} = 10^{10}, \rho = 1.1, k = 0$

- 1 *while* 不收敛 *do*
 - 2 利用式(4.2.2) 更新 U_{k+1}
 - 3 利用式(4.2.3) 更新 V_{k+1}
 - 4 利用式(4.2.4) 更新 L_{k+1}
 - 5 利用式(4.2.5) 更新 S_{k+1}
 - 6 利用式(4.2.6) 更新 M_{k+1}
 - 7 利用式(4.2.7) 更新 H_{k+1}
 - 8 利用
-

$$Y_1 \leftarrow Y_1 + \mu(F - L - S)$$

$$Y_2 \leftarrow Y_2 + \mu(L - UV^T)$$

$$Y_3 \leftarrow Y_3 + \mu(M - U)$$

$$Y_4 \leftarrow Y_4 + \mu(S - H)$$

更新 $Y_i, 1 \leq i \leq 4$

9 利用 $\mu \leftarrow \min(\rho\mu, \mu_{\max})$ 更新 μ_{k+1}

10 利用 $k \leftarrow k+1$ 更新 k

10 *end while*

输出: U, V, S

4.4 收敛性分析

定理 4.4.1 $\{(U^k, V^k, L^k, S^k, M^k, H^k, \{Y_i^k\})\}$ 是算法 4.3.1 产生的序列, 若序列 $\{Y_i^k\}$ 有

界, μ_k 非递减且满足 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_{k+1}}{\mu_k^2} < \infty$. 那么, 极限点 $(U_{\infty}, V_{\infty}, L_{\infty}, S_{\infty}, M_{\infty}, H_{\infty})$ 满足 KKT 条件:

$$0 \in \frac{2}{3} \partial \|M_{\infty}\|_* + Y_3^{\infty},$$

$$0 \in \lambda \partial \|S_{\infty}\|_{2/3}^{2/3} + Y_1^{\infty} + Y_4^{\infty},$$

$$0 \in \gamma(H_{\infty} Q_F^T + H_{\infty} Q_F) + Y_4^{\infty},$$

$$L_{\infty} = U_{\infty} V_{\infty}^T, M_{\infty} = U_{\infty}, S_{\infty} = H_{\infty}, L_{\infty} + S_{\infty} = F_{\infty}.$$

(注释: KKT 条件是不等式约束取得的局部极小值的必要条件, 即 $\min_x f(x) \text{ s.t. } h(x) \leq t \Leftrightarrow \min_x f(x) + \lambda h(x), \lambda \geq 0$)。

证明: 由定理 3.4.2 知, 序列 $\{(U^k, V^k, L^k, S^k, M^k, H^k, \{Y_i^k\})\}$ 是 Cauchy 列。接下来, 我们只需证明序列的极限点 $(U_{\infty}, V_{\infty}, L_{\infty}, S_{\infty}, M_{\infty}, H_{\infty})$ 满足 KKT 条件。

设 (U, V, L, S, M, H) 是正则点, 那么由一阶最优条件知:

$$0 \in \frac{2}{3} \partial \|M_{\star}\|_* + Y_3^{\star},$$

$$0 \in \lambda \partial \|S_{\star}\|_{2/3}^{2/3} + Y_1 + Y_4,$$

$$0 \in \gamma(H Q_F^T + H Q_F) + Y_4^*,$$

$$L = U V^T, M = U, S = H, L + S = F.$$

令 $U_\infty, V_\infty, L_\infty, S_\infty, M_\infty, H_\infty$ 是上述序列的极限点，则极限点满足上述要求，即

$$0 \in \frac{2}{3} \partial \|M_\infty\|_* + Y_3^\infty,$$

$$0 \in \lambda \partial \|S_\infty\|_{2/3}^{2/3} + Y_1^\infty + Y_4^\infty,$$

$$0 \in \gamma(H_\infty Q_F^T + H_\infty Q_F) + Y_4^\infty,$$

$$L = U_\infty V_\infty^T, M_\infty = U_\infty, S_\infty = H_\infty, L_\infty + S_\infty = F_\infty. \quad \square$$

4.5 数值实验

这部分，我们列举新方法和 26 种经典的方法作比较的结果。其中，包括五种低秩方法即 WLRR[16]，SMD[15]，ULR[28]，SLR[29]和 LRR[30]；二十一种非低秩方法，分别是 DRFI [17]，RBD [18]，HCT [19]，DSR [20]，MC [21]，MR [22]，HS [23]，PCA [24]，TD [25]，GC [26]，RC [27]，SVO [31]，GS [32]，SF [33]，CB [34]，CA [35]，SS [36]，SEG [37]，FT[38]，SR [39]，LC [40]。令 $\sigma^2 = 0.05$ ， $\lambda = 0.1$ ， $d = 25$ ， $\gamma = 0.05$ 。对于显著性探测步骤，数值实验框架如下，见图 4.1。

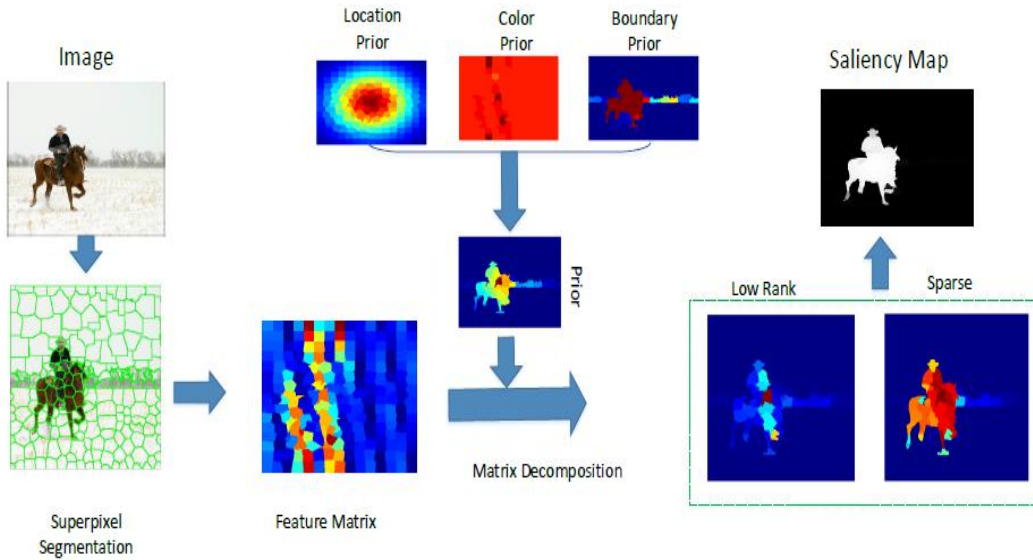


图 4.1 数值实验框图

表 4.1，表 4.2 和表 4.3 给出新方法与其他方法的比较。显然，新方法的每一项评价指标都位于前三名。图 4.2 和图 4.3 给出 ROC 曲线和 PR 曲线对比。从曲线来看，新方法取得了比较理想的结果。

图 4.4 给出新方法探测的视觉结果。从这些实验结果看出：新放法比其他方法检测

到的显著目标更完整，更准确，更接近 Ground truth。

表 4.1 不同方法在数据集 ECSSD 上的性能比较

Metric	Ours	WLRR	SMD	DRFI	RBD	HCT	DSR	MC	MR	HS	PCAPC	TD	GC	RC
WF ↑	0.527	0.500	0.517	0.517	0.490	0.430	0.489	0.441	0.480	0.449	0.358	0.413	0.437	0.320
OR ↑	0.542	0.499	0.523	0.527	0.494	0.457	0.480	0.495	0.491	0.432	0.371	0.398	0.376	0.265
AUC ↑	0.820	0.819	0.775	0.780	0.752	0.755	0.754	0.779	0.761	0.766	0.759	0.717	0.685	0.749
MAE ↓	0.187	0.211	0.227	0.217	0.225	0.249	0.227	0.251	0.235	0.269	0.291	0.271	0.256	0.334
Metric	Ours	ULR	SLR	LRR	SVO	GS	SF	CB	CA	SS	SEG	FT	SR	LC
WF ↑	0.527	0.351	0.442	0.398	0.316	0.436	0.307	0.403	0.304	0.134	0.323	0.199	0.138	0.242
OR ↑	0.542	0.347	0.474	0.442	0.084	0.433	0.271	0.419	0.254	0.099	0.206	0.212	0.171	0.206
AUC ↑	0.820	0.755	0.764	0.756	0.753	0.758	0.725	0.762	0.702	0.561	0.719	0.600	0.562	0.585
MAE ↓	0.187	0.312	0.252	0.254	0.427	0.255	0.329	0.282	0.343	0.320	0.369	0.312	0.308	0.332

表 4.2 不同方法在数据集 iCoSeg 上的性能比较

Metric	Ours	WLRR	SMD	DRFI	RBD	HCT	DSR	MC	MR	HS	PCA	TD	GC	RC
WF ↑	0.608	0.602	0.611	0.592	0.599	0.464	0.548	0.461	0.554	0.536	0.407	0.499	0.522	0.395
OR ↑	0.604	0.578	0.598	0.582	0.588	0.519	0.514	0.543	0.573	0.537	0.427	0.506	0.487	0.402
AUC ↑	0.835	0.843	0.822	0.839	0.827	0.833	0.801	0.807	0.795	0.812	0.798	0.817	0.765	0.829
MAE ↓	0.138	0.147	0.138	0.139	0.138	0.179	0.153	0.179	0.162	0.176	0.201	0.180	0.176	0.234
Metric	Ours	ULR	SLR	LRR	SVO	GS	SF	CB	CA	SS	SEG	FT	SR	LC
WF ↑	0.608	0.379	0.473	0.465	0.296	0.519	0.347	0.441	0.315	0.126	0.301	0.289	0.152	0.340
OR ↑	0.604	0.443	0.505	0.530	0.293	0.520	0.433	0.459	0.297	0.164	0.346	0.387	0.227	0.348
AUC ↑	0.835	0.814	0.805	0.804	0.808	0.819	0.812	0.782	0.775	0.630	0.792	0.717	0.632	0.716
MAE ↓	0.138	0.222	0.179	0.170	0.336	0.167	0.247	0.201	0.259	0.253	0.326	0.223	0.229	0.227

表 4.3 不同方法在数据集 MSRA10K 上的性能比较

Metric	Ours	WLRR	SMD	DRFI	RBD	HCT	DSR	MC	MR	HS	PCA	TD	GC	RC
WF ↑	0.688	0.665	0.704	0.666	0.683	0.582	0.656	0.576	0.642	0.604	0.473	0.561	0.612	0.384
OR ↑	0.730	0.701	0.741	0.723	0.716	0.674	0.654	0.694	0.693	0.656	0.576	0.605	0.599	0.434
AUC ↑	0.854	0.832	0.847	0.857	0.834	0.847	0.825	0.843	0.824	0.833	0.839	0.815	0.788	0.833
MAE ↓	0.112	0.127	0.104	0.114	0.108	0.143	0.121	0.145	0.125	0.149	0.185	0.161	0.139	0.252
Metric	Ours	ULR	SLR	LRR	SVO	GS	SF	CB	CA	SS	SEG	FT	SR	LC
WF ↑	0.688	0.425	0.601	0.448	0.339	0.606	0.372	0.466	0.379	0.137	0.349	0.277	0.155	0.345
OR ↑	0.730	0.524	0.691	0.494	0.245	0.664	0.440	0.542	0.409	0.148	0.323	0.379	0.256	0.380
AUC ↑	0.854	0.831	0.840	0.801	0.844	0.839	0.812	0.821	0.789	0.601	0.795	0.690	0.597	0.690
MAE ↓	0.112	0.224	0.141	0.153	0.340	0.139	0.246	0.208	0.237	0.255	0.315	0.231	0.232	0.234

The ↑ indicates the larger value achieved, the better performance is, while ↓ indicates the smaller, the better. The best three results are highlighted with red, green and blue fonts, respectively.

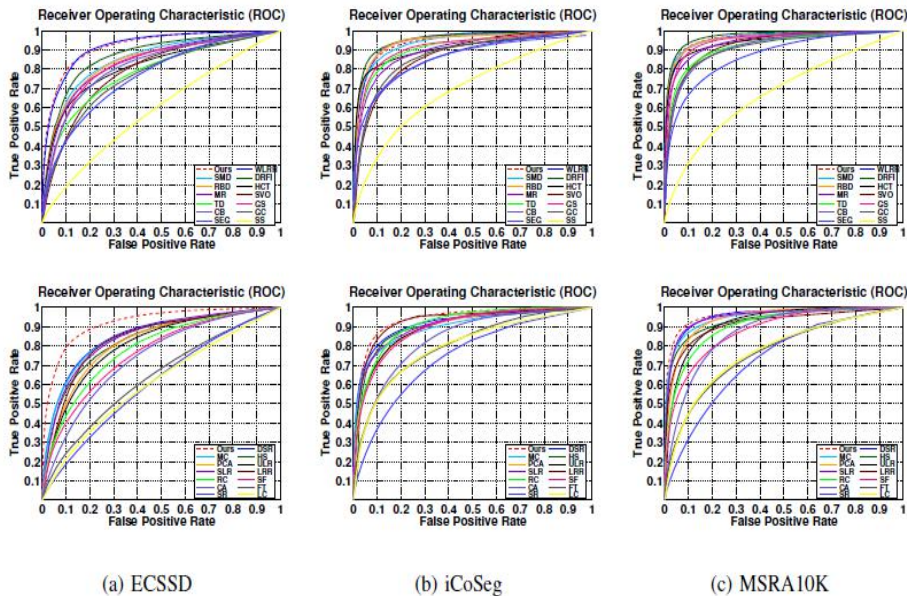


图 4.2 ROC 曲线

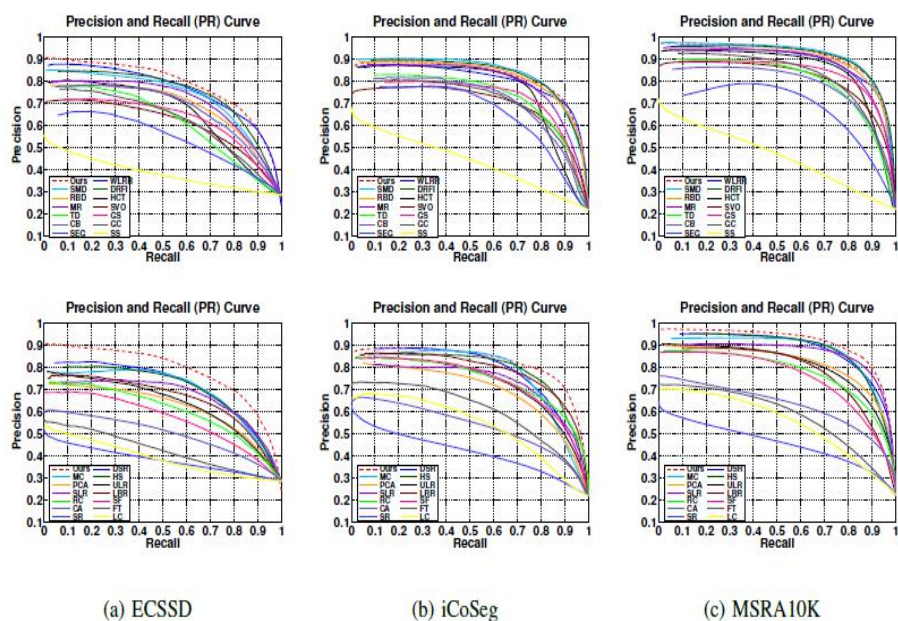


图 4.3 PR 曲线

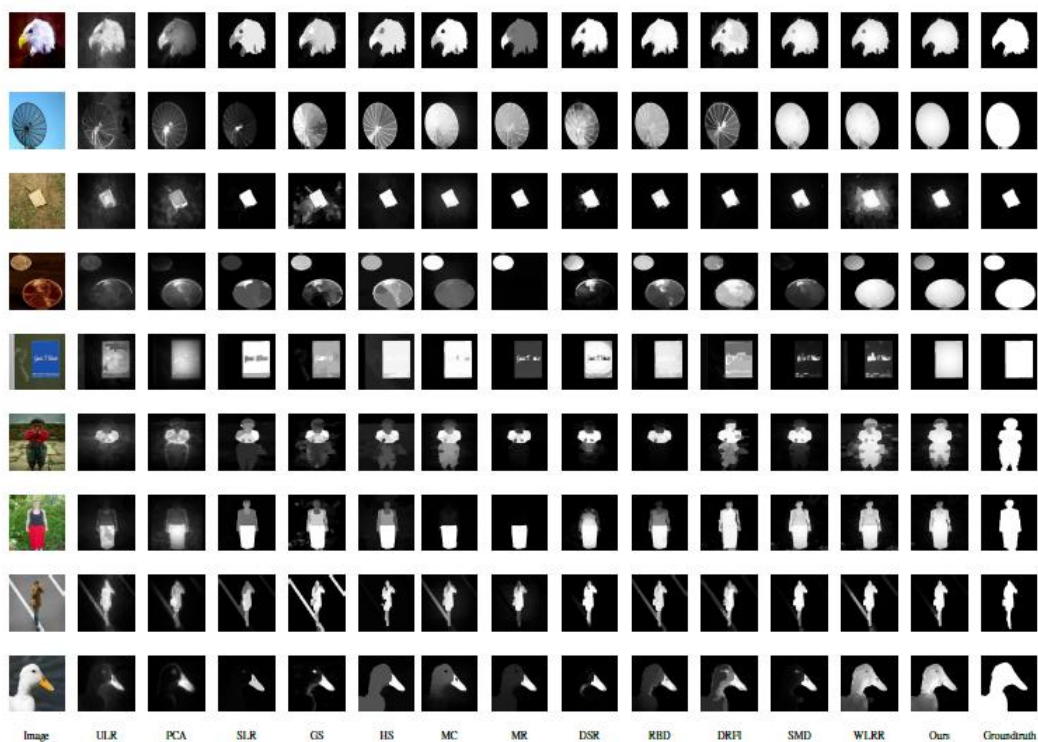


图 4.4 不同方法的视觉比较，其中 IMG 代表图像，GT 代表显著性目标标注。

4.6 本章小结

本章构造了一种基于双因子矩阵分解的非凸图像显著性检测模型。在该模型中，我们建议用非凸 Shatten-2/3 范数刻画背景，用稀疏 $l_{2/3}$ 刻画显著性目标，同时用拉普拉斯正则项描述背景与显著性目标的差异。对于模型求解，本章给出基于 ADMM 的快速算

法和相应的收敛性分析。大量的数值实验表明：新方法不仅取得最好的评判指标，同时给出最佳的视觉效果。

第5章 总结与展望

图像显著性目标检测是十多年来一直活跃在图像处理领域的一门新兴学科，它不仅在图像分割和目标识别中取得了满意的效果，而且在图像检索、目标跟踪及图像质量评价等大量的实际问题中得到了广泛应用。

近年来，在低层图像处理和分析中另一个最新的进展是基于非凸 Shatten-p 范数的图像处理理论。非凸 Shatten-p 范数现已应用于图像处理和计算机视觉的许多方面，包括图像恢复，图像填充和图像修补等，并且得到了很好的效果。本文从非凸 Shatten-p 范数理论出发，以图像显著性目标检测为研究主线，针对当前的低秩-稀疏分解模型给出推广及改进，主要模型有：

1. 以图像显著性目标检测为应用背景，探讨了非凸 Shatten-p 范数与组稀疏的有机结合。在该模型中，非凸 Shatten-p ($p = 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$) 范数用来刻画背景，组稀疏刻画显著性目标。

2. 针对显著性探测，给出了一种基于双因子矩阵分解的非凸检测模型。在该模型中，我们建议用非凸 Shatten-2/3 范数刻画背景，用稀疏 $l_{2/3}$ 刻画显著性目标。

此外，为了加大背景和前景的区别，建议对特征矩阵采用拉普拉斯正则项约束。同时，本论文给出这两种模型基于 ADMM 的快速算法和相应的收敛性分析。实验表明该算法具有可行性。

本文虽在图像显著性检测建模理论的研究方面取得了一些有意义的成果，然而由于模型是基于灰度图像的，因此对于彩色图像的刻画亟待解决。同时，考虑用张量表示彩色图像是一个比较合理的选择，所以在接下来的工作中我们将尝试用非凸低秩张量分解进行图像显著性目标检测。

参 考 文 献

- [1] J. Nocedal and S. Wright. Numerical Optimization [M]. New York: Springer, 2006.
- [2] T. Hastie and R. Tibshirani and M. Wainwright. Statistical Learning with Sparsity: The Lasso and Generalizations [M]. Chapman and Hall/CRC, 2015.
- [3] R. Horn and C. Johnson. Matrix Analysis [M]. Cambridge University Press, 2012.
- [4] G. Watson. Characterization of the subdifferential of some matrix norms [J]. Linear Algebra and its Applications, 1992 (170) 33-45.
- [5] J. Cai and E. Candes and Z. Shen. A singular value thresholding algorithm for matrix completion [J]. SIAM Journal on Optimization, 2010 (20), 1956-1982.
- [6] M. Fazel and H. Hindi and S. Boyd. Log-det heuristic for matrix rank minimization with applications to Hankel and Euclidean distance matrices [C]. Proceedings of the 2003 American Control Conference, 2003, 2156-2162.
- [7] Z. Kang and C. Peng and Q. Cheng. Robust Subspace Clustering via Smoothed Rank Approximation [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2015, 22 (11), 2088-2092.
- [8] M. Gu. Subspace Iteration Randomization and Singular Value Problems [J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2015, (37) 3, 1139 - 1173.
- [9] Z. Kang and C. Peng and J. Cheng and Q. Cheng. LogDet Rank Minimization with Application to Subspace Clustering [J]. Computational Intelligence and Neuroscience, 2015
- [10] D. Bertsekas. Nonlinear Programming [M], Athena Scientific, 2016.
- [11] S. Ma. Alternating Proximal Gradient Method for Convex Minimization [J]. Journal of Scientific Computing, 2016 (68), 546-572.
- [12] C. Chen and B. He and Y. Ye and X. Yuan. The direct extension of ADMM for multi-block convex minimization problems is not necessarily convergent [J]. Mathematical Programming, 2016 (155), 57-79.
- [13] R. Vidal and Y. Ma and S. Sastry. Generalized Principal Component Analysis [M]. New York: Springer, 2016:
- [14] F. Shang and Y. Liu and J. Cheng. Tractable and Scalable Schatten Quasi-Norm Approximations for Rank Minimization [J]. Computing Research Repository. 2018, abs/1803.00420.
- [15] H. Peng and B. Li and H. Ling and W. Hu and W. Xiong and S. J. Maybank. Salient Object Detection via Structured Matrix Decomposition [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2017, 39: 818-832.
- [16] C. Tang and P. Wang and C. Zhang and W. Li. Salient object detection via weighted low

- rank matrix recovery [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2017, 24: 490–494.
- [17] J. Wang and H. Jiang and Z. Yuan and M. Cheng and X. Hu and N. Zheng. Salient Object Detection: A Discriminative Regional Feature Integration Approach [J]. *International Journal of Computer Vision*, 2017, 123: 251–268.
- [18] W. Zhu and S. Liang and Y. Wei and J. Sun. Saliency Optimization from Robust Background Detection [C]. *2014 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2014, 2814–2821.
- [19] J. Kim and D. Han and Y. Tai and J. Kim. Salient Region Detection via High-Dimensional Color Transform [C]. *2014 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2014, 883–890.
- [20] X. Li and H. Lu and L. Zhang and X. Ruan and M. Yang. Saliency Detection via Dense and Sparse Reconstruction [C]. *2013 IEEE International Conference on Computer Vision*, 2013, 2976–2983.
- [21] B. Jiang and L. Zhang and H. Lu and C. Yang and M. Yang. Saliency Detection via Absorbing Markov Chain [C], *2013 IEEE International Conference on Computer Vision*, 2013, 1665–1672.
- [22] C. Yang and L. Zhang and H. Lu and X. Ruan and M. Yang. Saliency Detection via Graph-Based Manifold Ranking [C]. *2013 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2013, 3166–3173.
- [23] Q. Yan and L. Xu and J. Shi and J. Jia. Hierarchical Saliency Detection [C]. *2013 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2013, 1155–1162.
- [24] R. Margolin and A. Tal and L. Zelnik-Manor. What Makes a Patch Distinct? [C]. *2013 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2013, 1139–1146.
- [25] C. Scharfenberger and A. Wong and K. Fergani and J. Zelek and D. Clausi. Statistical Textural Distinctiveness for Salient Region Detection in Natural Images [C]. *2013 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2013, 979–986.
- [26] M. Cheng and J. Warrell and W. Lin and S. Zheng and V. Vineet and N. Crook. Efficient Salient Region Detection with Soft Image Abstraction [C]. *2013 IEEE International Conference on Computer Vision*, 2013, 1529–1536.
- [27] M. Cheng and N. Mitra and X. Huang and P. Torr and S. Hu. Global Contrast Based Salient Region Detection [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2015, 34, 569–582.
- [28] X. Shen and Y. Wu. A unified approach to salient object detection via low rank matrix recovery [C]. *2012 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2012, 853–860.

- [29] W. Zou and K. Kpalma and Z. Liu and J. Ronsin. Segmentation Driven Low-rank Matrix Recovery for Saliency Detection [C]. 24th British Machine Vision Conference, 2013, 1-13.
- [30] C. Lang and G. Liu and J. Yu and S. Yan. Saliency Detection by Multitask Sparsity Pursuit [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2012, 12, 1327-1338.
- [31] K. Chang and T. Liu and H. Chen and S. Lai. Fusing generic objectness and visual saliency for salient object detection [C]. 2011 International Conference on Computer Vision, 2011, 914-921.
- [32] Y. Wei and F. Wen and W. Zhu and J. Sun. Geodesic Saliency Using Background Priors [C]. Proceedings of the 12th European Conference on Computer Vision, 2012, 29-42.
- [33] F. Perazzi and P. Krahenbuhl and Y. Pritch and A. Hornung. Saliency filters: Contrast based filtering for salient region detection [C]. 2012 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2012, 733-740.
- [34] H. Jiang and J. Wang and Z. Yuan and T. Liu and N. Zheng. Automatic salient object segmentation based on context and shape prior [C]. Proceedings of the British Machine Vision Conference, 2011, 10.1-110.12.
- [35] S. Goferman and L. Zelnik-Manor and A. Tal. Context-Aware Saliency Detection [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2012, 34, 1915-1926.
- [36] X. Hou and J. Harel and C. Koch. Image Signature: Highlighting Sparse Salient Regions [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2012, 34, 194-201.
- [37] E. Rahtu and J. Kannala and M. Salo and J. Heikkila. Segmenting Salient Objects from Images and Videos [C]. Proceedings of the 11th European Conference on Computer Vision, 2010, 366-379.
- [38] R. Achanta and S. Hemami and F. Estrada and S. Susstrunk. Frequency-tuned salient region detection [C]. 2009 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2009, 1597-1604.
- [39] X. Hou and L. Zhang. Saliency Detection: A Spectral Residual Approach [C]. 2007 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2007, 1-8.
- [40] Y. Zhai and M. Shah. Visual Attention Detection in Video Sequences Using Spatiotemporal Cues [C]. Proceedings of the 14th ACM International Conference on Multimedia, 2006, 815-824.
- [41] X. Su and Z. He and C. Xu and X. Zhang and W. Zou and G. Baciu. Diversity induced matrix decomposition model for salient object detection [J]. Pattern Recognition, 2017(66), 253-267.
- [42] F. Shang and J. Cheng and Y. Liu and Z. Luo and Z. Lin. Bilinear Factor Matrix Norm Minimization for Robust PCA: Algorithms and Applications [J]. IEEE Transactions on Pattern

Analysis and Machine Intelligence, 2018(40): 2066-2080.

[43] R. Jenatton and J. Mairal and G. Obozinski and F. Bach. Proximal Methods for Hierarchical Sparse Coding [J]. Journal of Machine Learning Research, 2011(12): 2297-2334.

致 谢

时光似箭，研究生三年的学习生活即将结束。

在本文完成之际，谨向指导教师李敏致以衷心的感谢。感谢导师在本文选题和研究过程中以及在本文撰写过程中自始至终的悉心指导。

衷心感谢数学系尹乐老师，王晓峰教授，鲁坚教授，高智民教授，陈文胜教授，潘彬彬老师，孙晓丽老师，韩雨老师对我的教导！特别感谢张秀君老师，沈琳琳教授，赖志辉教授，于仕琪老师，杨烜教授，肖明庆教授，徐建鸿教授等的传道授业解惑。

感谢李松教授，莫群老师，何炳生教授的精彩报告。感谢同窗的陪伴，一起度过三年美好的时光。感谢奶奶的叮咛嘱咐，感谢父母的无私奉献，感谢哥哥嫂子的理解支持。

本文虽是在导师指导下完成的，但是本人才疏学浅，疏漏和不当之处在所难免，敬请批评指正！

攻读硕士学位期间的研究成果

- [1] Y. Zhang and L. Min. Motion segmentation using collaborative low-rank and sparse subspace clustering. 2017 13th International Conference on Computational Intelligence and Security, 409-414.
- [2] M. Li, Y. Zhang, M. Xiao, C. Xu and W. Zhang. On Schatten-q Quasi-Norm Induced Matrix Decomposition Model for Salient Object Detection. Pattern Recognition, 已投稿.
- [3] M. Li, Y. Zhang, M. Xiao and C. Xu. Salient Object Detection via Minimization of Bilinear Factor Matrix Norm. IEEE Transaction on Image Processing, 已投稿.