# 目　　录

# 实数的建构概述

数学与计算科学学院 信息与计算科学专业
张尧
学号：2010199001

**【摘要】**实数理论是极限理论的基础，极限理论又是微积分理论的基础，而微积分理论对自然科学与现代科技发展的意义举足轻重，因此实数理论的重要性不言而喻。本文主要介绍了实数的重要性，实数的建构，实数的若干性质以及实数建构的启示，并以此重新审视实数理论。

**【关键词】**实数 有理数 无理数 唯一性 稠密性

## 引言

公元17世纪，Newton和Leibniz发现了微积分理论，为当时的力学、天文学的研究提供了强有力的数学工具，大力推动了科学技术的发展。到了19世纪，由于微积分理论本身没有可靠的逻辑基础，再加上二百年来一直依靠几何直观和物理运动过程来推导微积分理论中的定理，这使得微积分的发展陷入举步维艰的境地。针对当时微积分理论的缺陷，Berkeley主教的“Berkeley悖论”把牛顿的无穷小量称之为“消失量的幽灵”[1]，这给当时的数学界带来了一场危机。

后来，虽有Cauchy和Weierstrass等人用极限理论给微积分理论奠基，但是这个基础在当时也是不够严格的，因为极限理论的基础实数理论没有建立起来。

从公元前500年，Hippasus发现第一个无理数，实数的相关问题就一直困扰着数学家，直到公元1872年才由Meray,Dedekind，Cantor等人给出了一个满意的答案，从此微积分才有了可靠的根基。

实数理论发展了两千多年,已经呈现百花齐放的状态,各种理论已经成熟. 也正因如此,很难将这些理论全部呈现出来.那么,是否可以对其主流发展过程与状态做一了清楚的概述,使得我们都可以将相关理论理解和应用得更加透彻呢? 这就是我们做此文的出发点.

本文是对实数相关理论的一个综述。 主要从实数理论的重要性,Dedekind,Cantor与Meray对实数的建构过程, 实数的十进制, 连分数表示方法以及实数的若干性质等方面来刻画实数，让实数的相关理论准确而直观的呈现出来。

# 1 实数的重要性

实数的重要性不言而喻，它是微积分理论的基础。本章从无理数的起源讲起，继而讲述实数理论对微积分理论发展的重要理论支撑作用。

## 1.1 第一个无理数的发现

公元前 500 年左右，在希腊有一个著名的 Pythagoras 学派。Pythagoras 学派认为宇宙是和谐的，万物皆数。以至于该学派的基本教义是：给定任意两线段 $a$ 及 $b$，恒可找到一足够小的的线段 $l$，可以同时量尽 $a$ 及 $b$。即：存在自然数 $m$，$n$，使得 $a=ml$，$b=nl$，则称 $a$，$b$ 可以被 $l$ 共度[3]。

据记载，Pythagoras 门徒 Hippasus 在家里毕恭毕敬画正方形，画着画着，算着算着，Hippasus 发现了正方形的边长和对角线不可以被共度。

为什么正方形的边长和对角线不可以被共度？

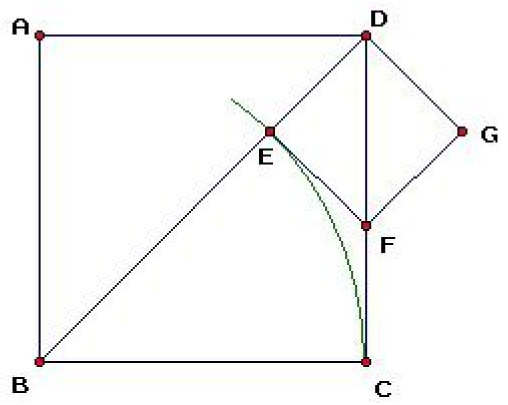


图 1-1

如图1-1所示，设正方形 $ABCD$ 其边长为 $a$，对角线长为 $b$，连接 BD，以 B 点为圆心 BC 为半径作圆交 BD 为 E。假设 $a$，$b$ 可以被共度，并设线段 $l$ 可以共度它们。

$\because$ $a$，$b$ 可以被 $l$ 共度

$\therefore$ DE=$b-a$ 也可以被 $l$ 量尽

同样的方法，以 DE 为边作新的正方形 DEFG，若连接 BF，则三角形 BEF 和 BCF 全等，则 EF=CF。

$\therefore$ DF=CD-CF=BC-DE

$\therefore$ DF 可以被 $l$ 量尽

$\because$ 三角形 DEF 和三角形 DCB 相似

$$\therefore \frac{BD}{BC}=\frac{DF}{DE}$$

.......

重复以上过程，依次类推，以至无穷，在这个过程中，会出现正方形的边长小于$l$，同时可以被$l$量尽，出现矛盾。

$\therefore a,b$ 不可以被共度，即$a$与$b$的比值不是有理数。

至此，历史上的第一个无理数就被 Pythagoras 的门徒 Hippasus 从 Pythagoras 自身的教义发现了,也就是这个发现使得 Hippasus 被投入了大海。

关于第一个无理数的发现，还有一个说法，Pythagoras 门徒 Hippasus 发现了正五边形的边长和对角线不可以被共度。

为什么正五边形的边长和对角线不可以被共度？

设 P 表示一正五边形，其边长为$a$,对角线长为$b$,连接 P 的每一条对角线，在 P 的中央又构成小的正无边形 P'，令其边长为$a'$，对角线长为$b'$,，如图 1-2，AB 长为$a$，BE 长为$b$，假设$a,b$可以被共度，设线段$l$可以共度它们。

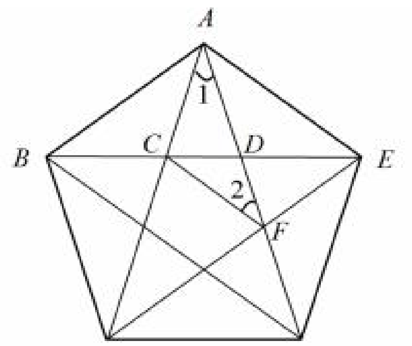


图 1-2

$\because$ ∠A=∠B=∠E=$180^\circ$×（5-2）÷5=$108^\circ$,∠EAF=（$180^\circ$-$108^\circ$）÷2=$36^\circ$

$\therefore$ ∠EAF=∠ABC=∠BAC

$\therefore \angle 1=180^\circ-2\times 36^\circ=36^\circ$,∠BDA=$180^\circ-36^\circ-36^\circ-36^\circ=72^\circ$

$\therefore$ ∠BAD=∠BDA 即 AB=BD,同理 AE=CE;

$\because$ AB=$a$可以被$l$量尽，BD=AB

$\therefore$BD 可以被$l$量尽

$\because$BE=$b$可以被$l$量尽,DE=BE-BD

$\therefore$DE 可以被$l$量尽

同理，BC 可以被$l$量尽

$\therefore a'$=CD=BE-BC-DE 可以被$l$量尽

$\because \angle 1=\angle 2$

$\therefore$b'=CF=AC=BC 可以被$l$量尽

$\therefore$ 小正五边形 p'的边长为$a'$及对角线长为$b'$也可以同时被$l$量尽，重复以上过程，依次类推，以至无穷，在这个过程中，会出现正五边形的边长小于$l$，同时可以被$l$量尽，出现矛盾。

$\therefore a,b$ 不可以被共度，即$a$与$b$的比值不是有理数。

到这里，这个无理数就被 Hippasus 发现了。

## 1.2 微积分理论的基石

微积分理论建立在极限理论之上，而极限理论则可通过$\varepsilon$-$N$语言表示。 $\varepsilon$是任给的正数，呈现出连续的状态，就像一条没有间隙的数轴，实数又与数轴建立了一一对应的关系，于是极限理论建立在实数理论之上。从某种意义上说，我们可以得出一个简单而又基本的结论，微积分理论建立在极限理论之上，极限理论建立在实数理论之上，所以微积分的基石是实数理论。

## 1.3 实数没那么简单

法国数学家 Augustin-Louis Cauchy 曾写过这样的文字：

导数真正是什么？ 答：极限。

积分真正是什么？ 答：极限。

无穷级数$a_1+a_2+a_3+$ ……真正是什么？ 答：极限。

这样就导致下面的问题

极限是什么？ 答：数。

所以最终的问题是：

数是什么？

数学中的数，就像物理中的时间，人人都知道,唯独专家们不这样理解它[2]。

实数，无论是有理数还是有理数，它们是人类理智为了实际需要而做出的抽象发明；实数乃是带‘正’号或‘负’号的无尽十尽小数[4]。

数是人类在争取生存、进行生成和交换的过程中所创造的一种特殊语言，是量的描述及运算的手段；在相当长的一段历史时期，人们只能认识经验所及的自然数以及由它所衍生的有理数。同时人们也自然想象，那些像单位正方形的对角线那样与单位长不可公度的几何量，应当与那些可公度的长度一样，有‘数’来加以表示......这些事从哪里来？它们将怎样表示和运算[5]。

1870 年前后，Weierstrass,Dedekind,Meray,Heine,Cantor 这些数学家几乎同时提出了实数系统的建构理论，解决了 2000 年来不可共度的问题及无理数的问题，从而建立了完备的实数理论，他们从有理数出发，建构方式不尽相同，但是从某种意义下，建构出实数是同

构的，这些数学家回答了，实数是什么，实数从哪里来，实数将怎样表示和运算？

实数理论为微积分的发展奠定了坚实的基础，推动了数学的发展，回过头来看，其实实数没那么简单，实数理论的发现与发展凝结了大量优秀数学家的汗水和心血。

# 2. 实数的建构

实数的建构是 19 世纪数学家解决第二次数学危机的关键所在。在实数建构的历史中，涌现很多十分优秀的数学家，很多出自于德国。在这一章我们主要介绍 Dedekind 和 Cantor-Meray 的工作，以及建立在定义之上的四则运算规则，最后介绍实数的十进制和连分数表示方法。

## 2.1 Dedekind 对实数的建构

如果把有理数比作直线，会使直线上充满了间隙，它是不完备、不连续的，而我们希望把直线看成是没有间隙的、完备的和连续的。那么，直线的连续性是什么意思？我们必须要有连续性的一个精确定义，使它可以成为逻辑推理的基础。长时期以来，不少数学家都为此付出了努力，但始终没有取得建设性的成果，一直到 Dedekind 对此问题的阐述，才使得我们发现要寻求的答案。不同的人对于我的发现将有不同的判断，但我相信大多数人都会觉得它平凡无奇。Dedekind 指出[6]：“如果直线上每一点 P 都将直线分成两部分，使得其中一部分的点都在另一部分的点的左方。我确信，连续性的实质就在它的反面，也就是下面的原理，如果直线上所有的点都属于两类，使得第一类中每一点都在另一类点的左方，那么就存在唯一的一个点，它产生了把直线分成两部分的分割。”

定义 2.1（Dedekind 分割[6]）将全体有理数 Q 分割为两个集合 $Q_1$ 和 $Q_2$，这样的分割如果满足下面的三个条件：

1）$Q_1$ 和 $Q_2$ 两个有理数集合都有元素；

2）$Q_2$ 中的任一数都大于 $Q_1$ 中的任一数

3）$Q_1 \cup Q_2 = Q$

我们把有理数全体的这样的分割方法叫做有理数分割，也叫做 Dedekind 分割，简记为（$Q_1$，$Q_2$）。

例 1 $Q_1 = \{x|x\in Q, x<2\}$，$Q_2 = \{x|x\in Q, x\geq 2\}$，（$Q_1$，$Q_2$）构成一个 Dedekind 分割，

且 $Q_1$ 中的有理数无最大值，$Q_2$ 中的有理数有最小值 2。

例 2 $Q_1=\{x|x\in Q, x^2<2$ 或 $x<0\}$，$Q_2=\{x|x\in Q, x^2\geq 2$ 且 $x\geq 0\}$，（$Q_1$，$Q_2$）构成一个 Dedekind 分割，且 $Q_1$ 中的有理数无最大值，$Q_2$ 中的有理数无最小值。

例 3 $Q_1=\{x|x\in Q, x\leq 2\}$，$Q_2=\{x|x\in Q, x>2\}$，（$Q_1$，$Q_2$）也构成一个 Dedekind 分割，且 $Q_1$ 中的有理数有最大值 2，$Q_2$ 中的有理数无最小值。

从上面的三个例子中我们可以得到 Dedekind 分割可能出现下面三种形式：$Q_1$ 中的有理数无最大值，$Q_2$ 中的有理数有最小值；$Q_1$ 中的有理数中无最大值，$Q_2$ 中的有理数无最小值；$Q_1$ 中的有理数有最大值，$Q_2$ 中的有理数无最小值。

引理 2.1 没有最小的有理数，也没有最大的有理数

证明：假设有最小有理数 q

$\because$ q-1 是有理数，q 是最小的有理数

$\therefore$ $q<q-1$

不等式两边同时减去 q，得到 $0<-1$，矛盾。所以没有最小的有理数。同理可得也没有最大的有理数。

性质 2.1 Dedekind 分割有且只有上述三种表现形式

证明：$\because$ $Q_2$ 中的任一数都大于 $Q_1$ 中的任一数且 $Q_1\cup Q_2=Q$，若 $Q_1$ 中的有理数有最小值

则 Q 中有最小的有理数，与引理 2.1 矛盾

$\therefore$ $Q_1$ 中的有理数没有最小值；同理 $Q_2$ 中的有理数没有最大值

若 $Q_1$ 中的有理数有最大值 m 同时 $Q_2$ 中的有理数有最小值 n，则存在有理数 $q=(m+n)/2\in Q=Q_1\cup Q_2$，由于 $Q_2$ 中的任一数都大于 $Q_1$ 中的任一数，故 $(m+n)/2\notin Q_1$，$m+n)/2\notin Q_2$，从而 $m+n)/2\notin Q_1\cup Q_2=Q$，矛盾，所以 $Q_1$ 中的有理数有最大值和 $Q_2$ 中的有理数有最小值不能同时存在。

综上所述，Dedekind 分割有且只有上述三种表现形式。

定义 2.2 对于全体有理数的每一个 Dedekind 分割，我们约定它是一个实数，若 $Q_1$ 中存在最大值或 $Q_2$ 中存在最小值，便称这一分割是有理数。否则便称这一分割为无理数。有了有理数和无理数的概念后，就有实数的概念实数 r=（$R_1, R_2$），$R_2$ 中的实数大于 $R_1$ 中的实数。

从上面的定义可以看出，实数包括了全体有理数和全体无理数，那么，实数是否可以看作是有理数集合的扩充呢？如果规定了实数的大小、四则运算或某种关系后，能使得这种大小、四则运算或某种关系对于实数中的有理数来说，与有理数原来的大小、四则运算或某种关系是一致的，那么实数就可以看作是有理数的扩充了。

实数的定义在直观上如图 2-1，为了回答上面疑问的方便以及实数表法的唯一性，我们约定≤、≥只能出现在集合 $Q_1$ 中元素满足的不等式中，不在集合 $Q_2$ 中元素满足的不等式中，为什么作这种约定呢，从上面的例子中我们看到例 1 和例 3 同时确定了有理数 2，再者从图 2-1 中看到，一个实数 Cut 把实数分成了两部分，把 Cut 归于左面和归于右面的集合都满足实数的定义，不妨把 Cut 归于左面，带来的好处是实数的 Dedekind 分割表法唯一。

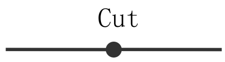


图 2-1

定义 2.3 两个实数 $\alpha=(Q_1, Q_2)$、$\beta=(P_1, P_2)$，若 $Q_1=P_1$，则 $\alpha=\beta$；若 $Q_1 \subset P_1$，则 $\alpha<\beta$；若 $Q_1 \supset P_1$，则 $\alpha>\beta$。

下面我们验证定义 2.3 在实数中的有理数集合中的合理性，不妨设 $q_1, p_1$ 分别为有理数，根据 Dedekind 分割：$q_1=(Q_1, Q_2)$，$Q_1=\{x|x\in Q, x\le q_1\}$，$Q_2=\{x|x\in Q, x>q_1\}$；$p_1=(P_1, P_2)$，$P_1=\{x|x\in Q, x\le p_1\}$，$P_2=\{x|x\in Q, x>p_1\}$。$Q_1=P_1 \Leftrightarrow q_1=p_1$；$Q_1\subset P_1 \Leftrightarrow q_1<p_1$；$Q_1\supset P_1 \Leftrightarrow q_1>p_1$，因为 $\Leftrightarrow$ 关系可以推出 $\Rightarrow$ 关系，所以定义 2.3 与原来有理数的大小关系是一致的。

下面我们可以定义实数的四则运算,为了叙述方面，我们记两个实数 $\alpha=(Q_1, Q_2)$，$\beta=(P_1, P_2)$，$Q_1=\{x|x\in Q\}$，$Q_2=Q-Q_1=\{z|z\in Q\}$，$P_1=\{y|y\in Q\}$，$P_2=Q-P_1$。

定义 2.4（加法） $\alpha+\beta=(S_1, S_2)$，$S_1=\{x+y|x\in Q_1, y\in P_1\}$，$S_2=Q-S_1$

定义 2.5（负元）$-\alpha=(O_1, O_2)$，$O'_1=\{x|x=-z, z\in Q_2\}$，把 $O'_1$ 有理数集合满足的不

等式中的>、< 改为≥、≤ ，新的集合记为$O_1$，$O_2$=Q-$O_1$。

定义 2.6（减法）$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$

定义 2.7（乘法）当$\alpha>0,\beta>0$时，$\alpha\times\beta=(M_1,M_2)$，$M_1=\{x\times y|x\in Q_1,y\in P_1\}$，$M_2=Q-M_1$；当$\alpha>0,\beta<0$时，$\alpha\times\beta=-(\alpha\times|\beta|)$；当$\alpha<0,\beta>0$时，$\alpha\times\beta=-(|\alpha|\times\beta)$；当$\alpha=0$,或$\beta=0$时，$\alpha\times\beta=0$。

定义 2.8（逆元）当$\alpha>0$时，$\alpha^{-1}=(W_1，W_2)$，$W'_1=\{x|x\in\{1/z\}\cup\{0\}\cup$\{所有负的有理数\}$,z\in Q_2\}$，把$W'_1$有理数集合满足的不等式中的>、< 改为≥、≤ ，新的集合记为$W_1$，$W_2=Q-W_1$；当$\alpha<0$时，$\alpha^{-1}=-(-\alpha^{-1})$。

定义 2.9（除法）$\alpha\div\beta=\alpha\times(\beta^{-1})$

可以通过验证，发现上述对实数四则运算的定义，与原来有理数的四则运算是一致的，由于验证是一个重复的过程，而且篇幅也比较大，所以在这里就不详细写出。到这里，关于 Dedekind 对实数的建构就简述到这里。

## 2.2 Cantor-Meray 对实数的建构

数学在其不断的发展中是完全自由的，它只受一些既定的因素制约，即它的概念既要内在的不存在矛盾，还要参照此前形成的，已经存在着的和已被证明的概念（借助定义贯穿起来）[7]。特别的，在引入新数时，数学只遵循：在给出它们的定义时，使之与旧数有某种关系，在特定的场合中这种关系一定会使它们（新数与旧数）区别开来。只要一个数满足这些条件，数学只能并且必须把它看作是实际的存在。这正是 Cantor-Meray 在其实数理论中把有理数、无理数和负数看作是与有限正整数一样是实际的存在来建构的原因。

定义 2.10 设$\{x_n\}$是一有理数列，对于任意给定的有理数$\varepsilon>0$,若存在自然数 N，使得任意自然数 m,n 且 m,n>N 时，都有

$$|x_m-x_n|<\varepsilon$$

则称有理数列$\{x_n\}$是 Cauchy 有理数列[3]。

如果把 Cauchy 有理数列相应的点标在直线上，则这些点最终会挤在一起，Cantor-Meray 希望他们的实数系统会使$\{x_n\}$趋近一实数，并用$\{x_n\}$表示一实数。

例 4 $\sqrt{2}$ 可以用｛1，1.4，1.41，1.414，1.4142，1.41421...｝表示

例 5 $\sqrt{3}$ 可以用｛1，1.7，1.73，1.732，1.7320，1.73205...｝表示

例 6 $\sqrt{6}$ 可以用｛2，2.4，2.44，2.449，2.4494，2.44948...｝表示

$\because \sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$

$\therefore \sqrt{6}$ 也可用｛1，2.38，2.4393，2.449048，2.4493944，2.4494824305...｝表示

由例 4、例 5、例 6 和上面可以看到，不同的 Cauchy 有理数列可以表示相同的实数，所以有必要对 Cauchy 有理数数列作一等价划分。

定义 2.11 两个 Cauchy 有理数列｛$x_n$｝｛$y_n$｝，若满足：

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$$

则称 Cauchy 有理数列｛$x_n$｝｛$y_n$｝等价，并记作｛$x_n$｝～｛$y_n$｝。

有了等价关系，自然会引出等价类概念

$$\{\overline{x_n}\} = \{\{y_n\} \mid \{y_n\}\text{是有理数列且}\{y_n\} \sim \{x_n\}\}\text{。}$$

定义 2.12(Cantor-Meray[3]) 实数是所有 Cauchy 有理数列的全体等价类的集合：

$$R = \{\ \{\overline{x_n}\} \mid \{x_n\}\text{是}Cauchy\text{有理数列}\}$$

在 Cantor-Meray 的看来，Cauchy 有理数列｛$x_n$｝就代表一实数。两个 Cauchy 有理数列｛$x_n$｝｛$y_n$｝，若｛$x_n$｝～｛$y_n$｝，则在 Cantor-Meray 系统中就认为｛$x_n$｝和｛$y_n$｝代表同一个实数，有等价类的概念后，就保证了实数表现形式的唯一性。

有了实数的定义后，就要定义实数的大小和四则运算。为了叙述的方便下面我们记 $x = \{\overline{x_n}\}, y = \{\overline{y_n}\}$; $x_n \sim x'_n$，$y_n \sim y'_n$。

定义 2.13（大小关系） 若任意有理数 $\varepsilon > 0$，存在自然数 $N$，$\forall n > N$ 使得

$$|x_n - y_n| < \varepsilon$$

成立，则 $x = y$；

若存在有理数 $\varepsilon_0 > 0$，存在自然数 $N$，$\forall n > N$ 使得

$$x_n < y_n - \varepsilon_0$$

成立，则 $x<y$；

若存在有理数 $\varepsilon_0>0$，存在自然数 $N$，$\forall n>N$ 使得

$$x_n-\varepsilon_0>y_n$$

成立，则 $x>y$。

定义 2.14（加法） $x+y=\{\overline{x_n+y_n}\}$

加法的定义合不合理呢，只要说明 $\{x_n+y_n\}$ 与 $\{x'_n+y'_n\}$ 是等价的，就可以说明上述的加法定义是合理的。

$\because\ x_n\sim x'_n\ \therefore\ \ x_n-x'_n\to 0\quad n\to\infty$

$\because\ y_n\sim y'_n\ \therefore\ \ y_n-y'_n\to 0\quad n\to\infty$

$\because\ \ x_n+y_n-(x'_n-y'_n)=(x_n-x'_n)+(y_n-y'_n)\to 0\qquad n\to\infty$

$\therefore\{x_n+y_n\}\sim\{x'_n+y'_n\}$ 故上述定义实数的加法是有合理的。

定义 2.15（负元） $-x=\{\overline{-x_n}\}$

定义 2.16（减法） $x-y=x+(-y)$

定义 2.17（乘法） $x\times y=\{\overline{x_n\times y_n}\}$

同样乘法的定义合不合理呢，只要说明 $\{x_n\times y_n\}$ 与 $\{x'_n\times y'_n\}$ 是等价的，就可以说明上述的乘法定义是合理的。

$\because$ $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 是 Cauchy 有理数列 $\therefore\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 是有界的

$\because\ x_n\sim x'_n\ \therefore\ \ x_n-x'_n\to 0\quad n\to\infty$

$\because\ y_n\sim y'_n\ \therefore\ \ y_n-y'_n\to 0\quad n\to\infty$

$$\begin{aligned}\because\ \ x_ny_n-x'_n\,y'_n&=x_ny_n-x_ny'_n+x_ny'_n-x'_n\,y'_n\\&=x_n(y_n-y'_n)+(x_n-x'_n)y'_n\\&\to 0\qquad\qquad n\to\infty\end{aligned}$$

$\therefore\{x_n\times y_n\}\sim\{x'_n\times y'_n\}$ 故上述定义实数的乘法是合理的

定义 2.18（逆元）当 $x \neq 0$，意味着从某一项起 $x_n \neq 0$，$\{x_n\}$ 去掉是 0 的项后构成 $\{x'_n\}$，

记 $x^{-1} = \overline{\{\frac{1}{x'_n}\}}$

定义 2.19（除法）$x \div y = x \times y^{-1}$

在这里仍可通过验证，发现上述对实数四则运算的定义，与原来有理数的四则运算是一致的，由于验证是一个重复的过程，在这里不详细写出。到这里， Cantor-Meray 关于对实数的建构所做的贡献可见一斑。

## 2.3 十进制、连分数的表示

我们人正常情况下生来就具有十个手指头、十个脚趾头，接着我们开始跟着大人进行学数数，也是掰着手指头进行的，我们从小接触的数也是十进制，这让我们的讨论变得很形象直观。

我们把形如

$$a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{10^n} \quad 与 \quad -(a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{10^n}) \qquad a\text{为正整数，}b_n\text{为0到9的整数}$$

的级数叫做十进小数，简称小数，通常我们把它记成 $a.b_1b_2b_3\ldots$ 与 -（$a.b_1b_2b_3\ldots$）。接着我们证明这样的级数收敛，如果第一个级数收敛，显然第二个级数收敛。

$\because$ $b_n$ 是 0 到 9 的整数 $\therefore$ $b_n \leq 9$

$\because$ $\frac{b_n}{10^n} \leq \frac{9}{10^n}$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10^n}=1$

$\therefore$ 由比较判敛法，$a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{10^n}$ 收敛

我们把实数定义为上述级数的大小，由于级数收敛值是唯一的，所以这种定义实数的方法是合理的。

在上面的论述中，我们发现 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10^n}=1$，为了实数表现形式的唯一性，我们把非以 9 循环的小数称作标准小数。

当存在某个正整数 $n_0$ 及某个正整数 $k$，使得对于任何 $n \geq n_0$，都有 $b_{n+kl} = b_n$， $k$ 是正

整数，我们把这样的小数称作是循环小数。在上面所描述的情况中，还有一种特殊的情况，那就是当 $n \geq n_0$ 时 $b_n = 0$，这样的小数称作为有尽小数。标准小数除循环小数外称之为无限不循环小数。循环小数由于等比级数的求和公式，循环小数又可以写成分数的形式。

这种表示用十进制级数表示实数的方法，比较容易让大家接受，也比较容易让大家记住。下面我们介绍实数的连分数表示法，我们将实数分为有理数和无理数分别讨论。

形如 $a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \ddots + \cfrac{b_n}{a_n}}}$ 这样的分数称为连分数，对与 $b_i$=1、 $a_i$>0，（i=1,2...n）的连分数 $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}$ 记为[ $a_0, a_1 ... a_n$ ],特别地，若 $a_0, a_1 ... a_n$ 都是整数，则称为简单连分数，下文所指的连分数如无特殊说明均指简单连分数，我们把 $a_i$ 称为第 i 个部分商。

有了上面的概念和注释后，我们可以得到下面的几个性质，证明的思想基本上是欧几里德辗转相除法的思想。

性质 2.2 任何有限连分数都可以表示有理数[8]

证明： 记 $\xi_i$ =[ $a_{i,} a_{i+1} ... a_n$ ](i=1,2...n)

$$\xi_n = a_n \geq 1$$

$$\xi_{n-1} = [a_{n-1} a_n] = a_{n-1} + \frac{1}{\xi_n} \quad >1$$

$$\xi_{n-2} = [a_{n-2} a_{n-1} a_n] = a_{n-2} + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}} = a_{m-2} + \frac{1}{\xi_{n-1}} >1$$

......

$$\xi_1 = [a_{1,} a_2 ... a_{n-1} a_n] = a_1 + \frac{1}{\xi_2} >1$$

$$\xi_0 = [a_{0,} a_{1,} a_2 ... a_{n-1} a_n] = a_0 + \frac{1}{\xi_1}$$

$\xi_i$（i=1,2...n）都是正数，$\xi_n\ \xi_{n-1}...\ \xi_0$都是整数经过有限次四则运算的结果，而且每次的除数都不是 0，所以$\xi_i$（i=0，1,2...n）都是有理数，特别地$\xi_0$是有理数。

性质 2.3 任何有理数都可以展开为有限连分数[8]

证明 设$\xi_0 = \dfrac{p}{q}$（p,q 互素），接着做带余除法，得到

$$p = a_0 q + r_1 \qquad 0 \le r_1 < q$$

$$q = a_1 r_1 + r_2 \qquad 0 \le r_2 < r_1$$

$$r_1 = a_2 r_2 + r_3 \qquad 0 \le r_3 < r_2$$

......

一般地 $r_{i-2} = a_{i-1} r_{i-1} + r_i \qquad 0 \le r_i < r_{i-1}$ i=1,2...n

设做了 n 次除法后，得到的非零余数是$r_n$是 p 和 q 的最大公约数，因为 p,q 互素，所以 $r_n$ =1，$r_{n-1} = a_n r_n = a_n$，记 $\xi_1 = \dfrac{q}{r_1}, \xi_{i-1} = \dfrac{r_{i-1}}{r_i}$，i=2,...n，把 $\xi_i$ 的表达式代到 $r_{i-2} = a_{i-1} r_{i-1} + r_i$中得到：

$$\xi_{i-1} = a_{i-1} + \frac{1}{\xi_i} \quad \text{i=1,2...n}$$

$$\xi_n = a_n$$

把$\xi_1$代入$\xi_0$中，把$\xi_2$代入$\xi_1$中......最后有

$$\xi_0 = a_0 + \frac{1}{\xi_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\xi_2}} = ......$$

$$=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\frac{1}{a_n}}}$$

$$=[a_0,a_1...a_n]$$

这样我们就把$\xi_0$展开为有限连分数，又因为$r_i<r_{i-1}$，从而$a_i\geq1>0$，所以就把$\xi_0$完满地展开为有限简单连分数了。

一般 情况下 若$n\neq0$,则$a_n=r_{n-1}>r_n=1$，若把$a_n$写成（$a_n-1$）$+\frac{1}{1}$,则$\xi_0$的连分数表示形式不唯一了，因为$\xi_0$既可写成［$a_0,a_1...a_n$］，又可写成［$a_0,a_1...$（$a_n$-1）,1］，为了$\xi_0$连分数表现形式的唯一性，我们规定后者不会出现。

下面我们就开始讨论无理数的连分数表示问题，我们先引入一个概念，若 x 是任一正实数，且除了$a_0$外，$a_i$是正整数，那么$\xi=$［$a_0,a_1...a_{k-1},x$］也表示实数，称$\alpha_n=a_0.a_1...a_n=\frac{p_n}{q_n}$为$\xi$的第 n 个渐近分数或渐近值。

我们不妨写出几个渐近值：

$$\frac{p_0}{q_0}=\frac{a_0}{1} \qquad \frac{p_1}{q_1}=[a_0,a_1]=\frac{a_0a_1+1}{a_1}$$

$$\frac{p_2}{q_2}=[a_0,a_1,a_2]=[a_0,a_1+\frac{1}{a_2}]=\frac{a_0(a_1+\frac{1}{a_2})+1}{a_1+\frac{1}{a_2}}$$

$$=\frac{a_2(a_0a_1+1)+a_0}{a_2a_1+1}$$

$$=\frac{a_2p_1+p_0}{a_2q_1+q_0}$$

可以用数学归纳法证明：

$$p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2} \qquad q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2} \qquad n\geq2$$

下面我们看一下$q_n$的规律或者说变化规律，$q_0=1,q_1=a_1\geq1=q_0$，因为$i\geq1$时，$a_i$是

正整数，在 $q_n$ 满足的等式中：

$$q_2 = a_2 q_1 + q_0 \geq q_1 + 1 \geq 2$$

$$q_3 = a_3 q_2 + q_1 \geq q_2 + 1 \geq q_1 + 2 \geq 3$$

$$\cdots\cdots$$

$$q_n = q_{n-1} + 1 \geq q_1 + n - 1 \geq n$$

这说明渐近来年分数的分母是递增数列且 $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \infty$。

我们还能得到一个很有趣的结果，$\alpha_n - \alpha_{n-1} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$ 即 $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$ [8]，使用数学归纳法就可以很快的得到这个结果。 n=1 时：

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = p_1 q_0 - p_0 a_1 = p_1 - p_0 a_1 = a_0 a_1 + 1 - a_0 a_1 = 1$$

假设 n-1 时上时成立，则

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-1} - (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) p_{n-1}$$

$$= p_{n-2} q_{n-1} - q_{n-2} p_{n-1} = (-1)(-1)^{n-2} = (-1)^{n-1}$$

这个结果有什么意义呢，实数在 Cantor-Meray 的观点看就是序列的极限，在 Cauchy 的观点看就是 Cauchy 序列，上面的结果 $|\alpha_n - \alpha_{n-1} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}| \leq \dfrac{1}{(n-1)^2} \to 0$，$n \to 0$ 正好呼应两者。

性质 2.4 任一无限简单连分数表示一无理数，任一无理数可用无限简单连分数表示[8]

证明 与性质 2.2，2.3 的证明思路一样，唯一不同的是渐近连分数构成一数列，这个数列有极限，但临近该无理数的左侧但在有理数范围内无最大值，右侧无最大值。在这里就不重复上述证明了。

# 3. 实数的若干性质

有了实数的定义之后，我们不得不谈有关实数的一些性质，比如唯一性、稠密性以及实

数理论较为重要的实数完备性定理，在本章，由于实数的唯一性涉及到代数学中的域的一些概念，这里只做简明扼要的陈述。

## 3.1 唯一性

当把实数与直线建立一一对应的关系，这时候对实数的定义都是合理的，直线上的有左右之分，当规定了原点和单位长度之后，直线上的点离原点的距离就可以比较大小了所以定义出的实数应该能够比较大小。其次, 直线上的点是连续的，所以实数也是连续的，再者实数是有理数的扩充，实数的四则运算是是封闭的。这样建构出的实数就是一个完备有序域，在保序同构意义下它是惟一的。所以任何人给出的实数定义并给出了运算法则，和比较大小的方法满足完备有序的条件都是合理的，Dedekind 和 Cantor-Meray 的出发点不同，但却是保序同构。完备有序域的唯一性，在 Garrett Birkhoff 和 Saunders Mac Lane 合著的 《A Survey of Modern Algebra》第五版中译本 91 页上有详细的证明，在 Van.der.Waerden 所著的《Algebra》第十一章也有详细的证明。

## 3.2 稠密性

实数的稠密性，我们经常在使用，我们也在不同的场合下讲两相相异实数之间存在有理数，两相相异实数之间存在无理数，但是鲜有地方证明这些有趣而实用的性质。下面我们就给出证明，不过在给出证明前，我们要给出几个辅助引理。

引理 3.1（确界原理[2]） 非空有界实数集，存在确界。

证明：不妨设集合 A 是一个有上界的非空有界集合，由 A 的一切上界集合组成一个新的集合 B，B 满足：

$$B=\{b\in R\mid \forall a\in A\text{有}a<b\};$$

以 A 的一切下界集合组成一个新的集合 C，C 满足：

$$C=\{c\in R\mid \forall a\in A\text{有}a>c\};$$

构造一个新的集合 D，D 满足：

$$D=A\bigcup C,$$

由实数的 Dedekind 定义知 $r=(D,B)$，那么 $r$ 就是 A 的上确界。同理非空有下界的集合必有下确界，故引理得证。

引理 3.2（Archimedes 性质[2]） 任意两实数 $a,b$ （$a>0$），必存在自然数 $n$ 使得 $na>b$ 。

证明：使用反证法。若 Archimedes 性质不成立，则存在两个实数 $a,b$（$a>0$），对任意自然数 $n$ ，存在 $na\le b$ ，那么我们构造集合：

$$E=\{na\mid n\text{是自然数}\}$$

则 E 有上界，由确界原理知 $\sup E$ 存在，不妨设为 $\beta$ ，那么有上确界的定义可知：$\forall\varepsilon>0,\exists n_1a\in E$ ，使得 $n_1a>\beta-\varepsilon$ ，由 $\varepsilon$ 的任意性，取 $\varepsilon=a$ ，那么上述不等式可改写为 $(n_1+1)a>\beta$ 与 $\beta$ 是 $E$ 的上确界矛盾，故 Archimedes 性质得证。

命题 3.1 两相异实数$a,b$之间存在实数

证明：不妨设$a>b$，则实数$c=\frac{a+b}{2}$满足$b<c<a$故命题得证。

命题 3.2 两相异实数$c,d$（$c>d$）之间存在有理数[9]

证明：显然$c-d>0$，由 Archimedes 性质存在正整数$n$使得$n(c-d)>1$，即$\frac{1}{n}<c-d$，设$m$是大于$nd$的最小整数，那么$\frac{m-1}{n}\le d$，所以

$$d<\frac{m}{n}=\frac{m-1}{n}+\frac{1}{n}<d+(c-d)=c$$

几何意义是对固定分母$n$的不同分数$0,+(-)\frac{1}{n},+(-)\frac{2}{n}\ldots$要落在$c,d$之间，那么$\frac{1}{n}$要小于$c,d$之间的距离。

命题 3.3 任意两相异有理数$a,b$（（$b>a$）之间必有无理数

证明：借助下图：

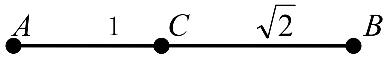


图 2-2

设 A 点离原点的距离是$a$，B 点离原点的距离是$b$，线段 AC 与线段 CB 距离比是$1:\sqrt{2}$，于是 C 离原点的距离是$c=\frac{\sqrt{2}a+b}{1+\sqrt{2}}$，显然$c-a=\frac{b-a}{1+\sqrt{2}}>0$，$b-c=\frac{\sqrt{2}(b-a)}{1+\sqrt{2}}>0$，所以$a<c<b$，下面证明$c$是无理数，我们使用反证法，设$c$是有理数，则$\frac{b-c}{c-a}\in Q$，用因为$\frac{b-c}{c-a}=\sqrt{2}$，矛盾，所以$c$是无理数，所以上述命题得证，因为有理数也是实数，所以上述命题可改写为两相异实数之间存在无理数。同样的道理当线段 AC 与线段 CB 距离比是$1:\sqrt{3}$、$1:\sqrt{5}\ldots$都可以证明上述命题成立。

## 3.3 实数的完备性定理

实数的完备性定理是实数建构出来以后不得不提的话题，实数的完备性理论是极限理论基础，实数的完备性定理有如下描述：

定理 3.1（确界原理[2]） 若非空数集 E 有上（下）界，则数集 E 存在唯一的上（下）确界。

定理 3.2（单调有界定理[2]） 单调有界数列必有存在极限。

定理 3.3（闭区间套定理[2]） 设有闭区间列｛[$a_n,b_n$]｝,若满足：

$$(1)\,[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\ldots\supset[a_n,b_n]\supset\ldots$$

(2) $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

则存在唯一数$\xi$使得$\xi = \bigcap_{1}^{\infty}[a_n, b_n]$

定理 3.4（有限覆盖定理[2]） 若开区间集 S 覆盖闭区间$[a,b]$，则 S 中存在有限个开区间也能覆盖闭区间$[a,b]$。

定理 3.5（聚点定理[2]） 数轴上有界无限点集 E 至少有一个聚点。

定理 3.6(致密性定理[2]) 有界数列$\{a_n\}$必有收敛子列$\{a_{n_k}\}$。

定理 3.7（柯西收敛准则[2]） 数列$\{a_n\}$收敛$\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \text{自然数} N，\forall m, n > N, \text{使得}$$

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

上述七个定理是等价的，即从任一个出发都可以推导出其他定理，所以这七个定理中的每一个都可以作为对实数完备性的描述，都可以揭示实数的连续性。上述七个定理的证明，几乎每一本数学分析教材中都会提供详细的证明，在这里，就不再累述了。

## 4. 实数理论建构的启示

第一个发现有理数的Hippasus被投进了地中海，建构实数的Cantor被关进了精神病院，不得不说这是人间的两个悲剧，当人们发现问题时，大多时不是解决问题而是用旧的观念去歪曲新的解决方案，做学问就要一颗宽容开放的心，才能做的好，才能得到他人的尊重。

我们看到Dedekind、Cantor、Meray等人建构实数都是从有理数出发，都是从已知推未知，不可强求无知推已知。什么是实数，实数有什么用？对于普通人来说，或许真没什么用，诚然实数理论是微积分的基石，我想驱动数学家做这件事最大的动力还是心中的好奇。

**【参考文献】**


[1] George Berkeley. The Analyst A Discourse Addressed To An Infidel Mathematician [M]. Montana: Kessinger Publishing,LLC, 2004.

[2] 卓里奇. 数学分析(第 1 卷）[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006（第四版）.

[3] H.-D.Ebbinghaus 等. Numbers[M]. New York:: Springer, 1996.

[4] 阿黑波夫等. 数学分析讲义[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006（第三版）.

[5] 曹之江，王刚. 微积分学简明教程(上册）[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004（第二版）.

[6] Richard Dedekind. ESSAYS ON THE THEORRY OF NUMBERS[M]. Maryland: Wildside Press LLC .2007.（Including the paper ： Continuity And Irrational Numbers）

[7] Cantor.On The Extension Of A Result From The Theory Of Trigonometric Series[J]. Math.Ann:5.1871.

[8] 任岩.实数[M].杭州：浙江人民出版社，1980.

[9] Rudin. Principles Of Mathematical Analysis[M]. New York: McGraw-Hill,Inc, 1976.

[10] 杨维哲.何谓实数[M]. 台北：台湾商务印书馆，民国 64 年.

[11] 王昆扬. 实数的十进表示[Z]. 北京:北京师范大学 ,2008.

[12] 林琦焜. 实数系的建构[J]. 数学传播, 33（2）.

[13] 伯克霍夫, 麦克莱恩. A Survey of Modern Algebra [M]. 北京：人民邮电出版社, 2007.

[14] 郝兆宽. 数的定义戴德金与弗雷格[J]. 复旦学报，2006，5.

[15] 蒙虎. 实数系统的历史反思——兼评中国古算与实数系统[J]. 自然辩证法通讯, 2007 ,6.

## 致谢

我要感谢我的指导老师邓娟老师，这篇论文是在邓老师的亲切关怀和悉心指导下完成的，在这里谨向邓老师致以诚挚的谢意和崇高的敬意。

我要感谢我的同学廖晓鹏，当我遇到困顿不解时，从武汉大学图书馆影印了一本台大杨维哲教授的何谓实数一书送给我。在这里谨向小鹏同学致以最真诚的谢意。

我要感谢我在深大数学学院给我讲授过功课的所有老师，让我学到了许多数学知识和许多做人、做人知识，在这里谨向上述老师致以诚挚的祝福。

我要感谢我的家人，他们一直在背后默默支持我、鼓励我，在这里谨向我的家人致以诚挚的感谢与祝福。

# Construction of the real numbers

【Abstract】 The real number theory is the basis of the limit theory, and limit theory is the cornerstone of the theory of calculus. Calculus plays a great role in progressing of science and technology ,so the real number theory is very important. We describe the importance of real numbers, introduce the process of construction of real numbers, discuss some important properties of real numbers, and then express the inspiration of the real number theory, which make us re-examine the theory of real numbers.

**【Key Words】**real number, rational number, irrational number, uniqueness , denseness