Final Version August 2, 2025

基于全息爱因斯坦-麦克斯韦-狄拉顿 (EMD) 模型的热 QCD 相图

R. Rougemont, J. Grefa, M. Hippert, J. Noronha, J. Noronha-Hostler, I. Portillo, C. Ratti

目录

0 摘要

在本综述中，我们提供了基于引力-麦克斯韦-狄拉顿（EMD）有效模型类的定量自下而上的全息描述，针对相对论重离子碰撞中产生的强耦合夸克-胶子等离子体（QGP）进行了最新的总结。我们采用全息方法，尝试将有限温度下的 QCD 相图映射到一个五维带电反德西特（AdS）黑洞的对偶理论中。本文重点分析了热 QCD 相图，并对回顾的非共形全息 EMD 模型进行了调整，以描述具有 2+1 味和物理夸克质量的有限温度 QCD 方程状态的第一性原理格点结果，假设零化学势和无电磁场。我们回顾了这些有效模型的演变，并探讨了它们在量化描述 QCD 去禁闭热 QGP 相中的改进。全息 EMD 模型的预测能力通过将其在非零重子密度下的热 QCD 方程状态的预测与最新的格点 QCD 结果进行量化比较来进行检验。我们还将这些 EMD 模型预测的流体力学输运系数，如剪切黏度和体积黏度，与最新的表征不同类型重离子数据的多阶段现象学模型的结果进行了对比。此外，我们简要报告了使用 EMD 模型的贝叶斯分析的初步结果，这为格点 QCD 在有限温度和零重子密度下的结果提供了系统性证据，表明这些结果在很大程度上约束了这些自下而上的全息构造的自由参数。值得注意的是，通过格点结果在零化学势下的约束，得到的参数集不仅与格点 QCD 结果在零重子密度下保持一致，而且在有限重子密度下也能够与格点 QCD 结果量化一致。我们还回顾了磁场 EMD 模型的平衡态和输运性质的结果，这些模型有效地描述了在有限温度和磁场下的热和磁化 QGP，且假设零化学势。最后，我们对本文所述的全息模型的主要局限性和不足之处进行了批判性评估，并指出了我们认为在未来发展中具有基础性重要性的几个方向。

1 引言

量子色动力学（QCD）是描述粒子物理标准模型中强相互作用部分的量子场论（QFT）。在最基本的层面上，QCD 包含夸克和胶子（统称为部分子），它们分别是费米子和非阿贝尔规范矢量场的粒子 [1,2]。QCD 物质可以呈现出丰富而复杂的相态和状态，这取决于部分子所处的条件 [3-6]。在过去五十年中，这些不同的相态和状态得到了广泛研究，理论、实验、天体物理观测和大规模计算模拟的共同努力推动了这一领域的发展 [7-12]。

在微观层面，QCD 主要负责宇宙中普通重子物质的两个关键特性。首先，通过介子交换作用有效结合核子（质子和中子），从而保证原子核的稳定性，而复合强子粒子间最基本的相互作用是通过夸克之间的胶子交换实现的。其次，QCD 通过低能态下轴向对称性的动态破缺，生成宇宙中普通物质的绝大部分质量。例如，在零重子密度下，QCD 去禁闭交叉转变的典型温度尺度为 $T_c \sim 150\,\mathrm{MeV}$，在低于此温度时，这种质量生成机制尤为显著 [13-15]。事实上，核子（以及由此构成的原子和宇宙中基于原子的普通宏观结构）约 98% 以上的质量来源于强相互作用，其余微小部分则来源于希格斯机制产生的当前夸克质量 [1,2,16-18]。与上述特性密切相关，QCD 还展现出所谓的色荷禁闭现象。这通常是指，夸克和胶子作为承载 QCD 非阿贝尔规范群 $SU(N_c = 3)$ 下色荷的自由度，从未在实验中以孤立的渐近状态被观测到，而是被禁闭在色中性的强子内部 [19]。

基于 QCD 的多种性质，我们可以在特定能量尺度下确定其自由度。由于色数 $N_c = 3$ 和夸克味数 $N_f = 6$，QCD 是一个渐近自由的非阿贝尔规范理论 [20,21]。这意味着 QCD 耦合常数的 β-函数为负，表明其随重整化群能量尺度的增加而减小，并在渐近高能下趋于零。相反，当能量尺度低于或接近 QCD 维度变换尺度 $\Lambda_{\mathrm{QCD}} \sim 200\,\mathrm{MeV}$ 时，QCD 变为强耦合的非微扰量子场论，表明微扰 QFT 方法在研究低能 QCD 现象（如夸克禁闭）时失效。因此，在低能和低温下，预计会出现强子气体共振（HRG）相，而在高能下，由于渐近自由，预计会出现由夸克和胶子组成的去禁闭相，即夸克-胶子等离子体（QGP）。由于其渐近自由性，QGP 可能被认为是一个弱相互作用介质。实际上，在足够高的温度下，例如在夸克时代（宇宙背景辐射温度在几微秒内从数百 GeV 降至数百 MeV），以及在早期宇宙的 QCD 相变之前，QGP 是一个弱耦合流体。相比之下，QCD 中的硬热环路（HTL）微扰理论在温度 $T \gtrsim 300\,\mathrm{MeV}$ 时，似乎能够合理描述通过格点 QCD（LQCD）模拟非微扰计算的某些热力学可观测量 [22]。然而，在低于这一大致阈值的温度下，微扰 QCD（pQCD）与非微扰 LQCD 结果的吻合通常丧失，这大致设定了温度窗口 $T_c \sim 150\,\mathrm{MeV} < T < 2T_c \sim 300\,\mathrm{MeV}$（零重子密度下），此时 QGP 表现为强耦合流体 [6]。这一温度范围恰好与相对论重离子碰撞实验（如在相对论重离子对撞机（RHIC）[23-26] 和大型强子对撞机（LHC）[27,28] 上进行的实验）探测的范围相符。

1.1 重离子碰撞的一些现象学结果

在重离子碰撞中产生的夸克-胶子等离子体（QGP）的强耦合特性不仅从热力学可观测量中推导得出，还体现在流体动力学输运系数上。这些系数通常通过分析同时描述多种重离子数据的现象学模型推断得出 [6,29-33]。

高温高密度的介质在相对论重离子碰撞中产生，通常被认为在其时空演化过程中经历了几个不同的阶段，如图 1.1 所示。最初，两束重离子被加速到接近光速，在极高能量下，核内胶子密度不断增加直至达到饱和值，形成所谓的色玻璃凝聚态（CGC）[34-37]，这是碰撞后介质初始条件的典型来源。在碰撞后约 $\lesssim 1\,\mathrm{fm}/c$ 的特征时间间隔内，系统处于前平衡阶段，预期由高度相干的胶子组成的湍流介质来描述。因此，这一阶段由经典色动力学场的动态主导，形成所谓的"玻璃态"(glasma)，这一名称反映了其作为色玻璃凝聚态与夸克-胶子等离子体之间的中间状态的特性 [38]。随着玻璃态的扩展和冷却，它开始解相干，逐渐演变为一种可用相对论粘性流体动力学有效描述的 QCD 物质状态 [39-42]，其物理上相关的自由度对应于碰撞后约 $\gtrsim 1\,\mathrm{fm}/c$ 形成的去禁闭但仍强相互作用的夸克和胶子。随着 QGP 继续扩展和冷却，它最终进入 QCD 相图的 QGP-HRG 交叉区域，发生强子化 [13,15]。系统时空演化的下一阶段包括所谓的化学冻结 [43]，此时强子之间的非弹性碰撞停止，不同种类粒子的相对比例保持固定。随后是热冻结或动力学冻结，此时强子之间的平均距离足够大，短程残余强核相互作用变得可忽略，从而固定了强子的动量分布。此后，产生的强子几乎成为自由粒子，其衰变产物到达实验探测器，为系统演化前期阶段提供信息。

在本文讨论的主题中，剪切粘度 η 和体视粘度 ζ 尤为重要。这些流体动力学输运系数无法在重离子碰撞实验中直接测量，通常作为现象学流体动力学模型中的自由函数（依赖于温度，有时也依赖于其他变量，如化学势或电磁场），通过与重离子数据的比较（例如使用贝叶斯推断方法）确定其值 [32,33,44,45]。

通过这种方法，通常发现，在零重子密度下的 QCD 相图 QGP-HRG 交叉区域，η/s（其中 s 为介质的熵密度）在自然单位（$c = \hbar = k_B = 1$）下应与 $1/4\pi$ 同量级（将在 1.4 节讨论，这是来自广泛全息模型的强耦合量子流体的基准值）[?, ?, ?]，比微扰计算结果至少小一个量级 [49-51]。推断出的 QGP 在重离子碰撞中具有的低剪切粘度与熵密度比 η/s，被物理上解释为其近乎完美流体的明显表现，如图 1.2 所示。

除了 η/s，体视粘度与熵密度比 ζ/s 在重离子数据的现象学描述中也扮演重要角色 [31,52,53]。例如，JETSCAPE 协作组开发了一种最先进的现象学多阶段模型，用于同时描述 RHIC 和 LHC 不同实验的多种强子测量结果，其结果支持图 1.3 所示的零重子密度下依赖温度的 ζ/s 和 η/s 分布 [33]。这些流体动力学粘度的现象学结果将在 2.1.2 节与全息计算和预测的定量微观结果进行比较。

通过改变粒子加速器中重离子碰撞的条件，可以实验性地探测 QCD 相图在有限温度和非零重子密度下的某些方面和区域。例如，在 LHC 上以质心能量 $\sqrt{s_{NN}} = 2.765.02\,\mathrm{TeV}$ 进行的重离子碰撞，

其能量如此之高，以至于非零重子化学势 μ_B 的平均效应可以忽略（尽管在这些能量下守恒电荷的涨落仍起作用）[54-56]。另一方面，RHIC 的束流能量扫描（BES）计划覆盖了较低碰撞能量区间 $\sqrt{s_{NN}} = 7.7200\,\mathrm{GeV}$[57]，此时 QGP 中的重子化学势与温度同量级，使得实验能够探查 QCD 相图中非零 μ_B 的某些区域。此外，RHIC 的固定靶实验 [58-60] 以及 HADES[61] 和 FAIR[62-67] 的较低碰撞能量实验，旨在实验性地探索 QCD 相图在 (T,μ_B)-平面上的高重子密度区域结构。这些实验的主要目标之一是确定假设的一阶相变线的临界端点（CEP）位置，根据多种模型计算，这一临界端点预计存在于高重子密度的 QCD 相图中 [68,69]。

1.2 格点 QCD 结果

由于缺乏一致的微观模型或系统的有效场论，现象学方法依赖实验数据（以及一些基本的现象学模型假设）来约束输入参数。然而，这种方法无法解释 QCD 中某些输运和平衡属性的起因及形成机制。

QCD 在低能下的强耦合特性使得微扰 QCD（pQCD）的系统方法无法适用于描述高能粒子加速器实验及天体物理观测中可探查的多种物理现象。然而，在零或较小的重子化学势 μ_B 下，研究 QCD 平衡现象（如多种热力学可观测量的行为）可采用另一种基于第一性原理的方法，即格点 QCD（LQCD）模拟。

这一方法的基本原理由肯尼斯·威尔逊（Kenneth Wilson）提出，核心是将欧几里得时空的虚时间版本离散化 [70]。物质场（如夸克的费米子场）定义在离散网格的节点上，而规范场（如胶子）则被视为连接相邻节点的链接变量 [71-76]。采用虚时间松原形式（Matsubara formalism）定义的欧几里得路径积分，可通过蒙特卡洛方法进行计算。理论上，通过使相邻节点间的格点间距趋于零，可形式上恢复连续 QCD。然而，由于格点间距减小导致数值模拟的计算成本大幅增加，实际操作中通常通过对一系列逐渐减小的格点间距进行计算并外推来逼近连续极限，这些间距仍需保持足够大以确保计算可行 [54]。LQCD 在本文相关研究中的显著成就包括基于第一性原理计算轻强子（如介子和核子）的质量，与实验测量结果一致 [77]，以及确定零重子密度下 QCD 从强子气体共振（HRG）相到夸克-胶子等离子体（QGP）相的转变性质，表现为一个宽广的连续交叉 [13,15]。

尽管 LQCD 计算取得了显著成功，但也存在一些重要限制，具体包括：首先，由于格点场论中的所谓“符号问题”，在非零重子密度下进行数值模拟 debts 困难 [78,79]；其次，计算与系统实时动态相关的非平衡输运可观测量存在问题。前者是一个算法问题，源于夸克的费米子行列式在非零实 μ_B 下变为复数，这意味着它无法定义用于重要性采样的概率测度，从而破坏了通过蒙特卡洛方法直接计算 LQCD 路径积分的可能性。后者则源于在虚时间下计算的欧几里得相关函数难以解析延拓到闵可夫斯基时空的实时区间 [80]。

尽管如此，近年来已开发并应用了多种技术，用于在 LQCD 中计算有限温度和适中重子化学势下的

状态方程，以及估计有限温度和零重子密度下某些输运系数的行为。这些技术在相关综述中有详细描述 [54,81]。实际上，针对具有 2+1 味且夸克质量为物理值的连续外推 QCD 状态方程的最新格点模拟结果，现已通过一种新的展开方案达到 $\mu_B/T \leq 3.5$[82]，并通过传统泰勒展开达到 $\mu_B/T \leq 3$[83]。这些在有限 (T, μ_B) 下的热力学可观测量的 LQCD 结果将在 2.1.1 节与全息计算和预测的定量微观结果进行比较。

1.3 全息规范-引力对偶性的一些基本方面

上述提到的当今格点模拟的局限性限制了基于第一性原理的 QCD 计算在高重子密度下对强相互作用 QCD 物质的探究，在这些条件下可能存在从禁闭强子自由度到去禁闭部分子自由度之间的真实相变，如图 1.4 的示意图所示 [80]。此外，即便在 $\mu_B = 0$ 的情况下，QCD 输运属性的格点 QCD（LQCD）模拟也已相当困难，更不用说在有限重子密度下。在这些情况下，通常会借助有效模型和其他替代理论方法，以获得在极端条件下 QCD 物质行为的定性洞察甚至某些定量预测。

本文讨论的一种替代方法是广泛称为全息规范-引力对偶性（在更严格条件下也称为 AdS-CFT 对应）的理论工具 [84-87]。全息规范-引力对偶性源于弦理论的框架，而弦理论与强相互作用之间有着悠久而奇特的关系。实际上，（非超对称）弦理论最初被发展为描述强子间强核力的 S 矩阵理论，实验上已知强子符合线性雷格轨迹（Regge trajectories），其总角动量 J 与质量平方 m^2 的关系表现为 Chew-Frautschi 图 [88]。通过将介子建模为绕其中心旋转的相对论开弦，可以重现观察到的 Chew-Frautschi 关系，即 $J = \alpha_0 + \alpha' m^2$，其中相对论弦张力由线性雷格轨迹的斜率确定，$\sigma = (2\pi\alpha')^{-1} \approx (440\,\mathrm{MeV})^2$[19]。该斜率对于不同雷格截距 α_0（已知依赖于强子的味量子数——具有相同味量子数的强子落在同一雷格轨迹上，可视为该轨迹上具有不同质量和角动量的共振态）的雷格轨迹大致相同。然而，由于该简单弦模型预测的结果与强子实验明显矛盾（例如，在强子固定角度高能散射极限下，关联的 Veneziano 散射振幅呈现错误的软指数衰减），它已被放弃作为强子的模型，被 QCD 的理论和实验成功所取代，QCD 成为描述强相互作用的基本理论。

后来，弦理论的理论兴趣在完全不同的背景下大幅复兴，经历了所谓的第一和第二次超弦革命，分别对应于：1）发现了五种在 10 维时空下自洽的超对称量子弦理论（I 型、IIA 型、IIB 型、杂化 $SO(32)$ 和杂化 $E_8 \otimes E_8$ 超弦理论）；2）发现这五种 10 维超弦理论通过一系列对偶变换相互关联，并与定义在 11 维时空的膜理论（M 理论）相关，M 理论的低能极限对应于唯一的 11 维超引力理论。所有超弦理论的一个显著共同特征是其谱中包含一个张量自旋为 2 的无质量粒子，即引力子，这是假想的弦振动模，负责在量子水平上介导引力相互作用。由于这一原因，以及超弦理论在低能下简化为超引力，从而包含广义相对论作为引力的低能经典描述，超弦理论成为量子引力的有趣候选 [89-93]。此外，还存在一种期望，即标准模型可能作为弦理论中 10 维时空中的 6 维紧致化于某一特定流形后的低能区而出现，该流形需以非常特定的方式选择，以生成我们宇宙中观测到的粒子物理现象学。如此，弦理论可被视为一种“万物理论”，在某种意义上可能描述自然界中的所有粒子和基本相互作用。

无论弦理论是否是自然界所有基本相互作用的统一理论 [94-96]，毫无疑问，受到弦理论启发并针对强相互作用的新有效方法和应用，随着全息规范-引力对偶性的出现而蓬勃发展。在第 2 节讨论其在高温高重子密度强耦合 QGP 物理中的现象学方面之前，我们将在下文讨论全息对应的一些基本普遍方面。

所谓 AdS-CFT 对应（也称为全息规范-引力对偶性）[84-87] 的原始表述，将定义在五维反德西特（AdS）时空与五维球面乘积流形 $AdS_5 \otimes S^5$ 上的 IIB 型超弦理论，与定义在 AdS_5 共形平坦四维边界上的 $\mathcal{N}=4$ 超对称杨-米尔斯（SYM）理论（规范群为 $SU(N_c)$）联系起来。AdS-CFT 对偶性的另外两个早期实现包括：定义在 $AdS_4 \otimes S^7$ 上的 M 理论与 AdS_4 三维边界上的 Aharony-Bergman-Jafferis-Maldacena（ABJM）超共形场论之间的关系，以及定义在 $AdS_7 \otimes S^4$ 上的 M 理论与 AdS_7 六维边界上的所谓 6 维 (2, 0) 超共形场论之间的关系。从一个非常简单且不严谨的角度来看，可以将 $\mathcal{N}=4$ SYM 理论视为 QCD 的“玩具模型”，而 ABJM 理论则可视为低维凝聚态系统的“玩具模型”。然而，从现实的现象学角度来看，这种类比在定量和定性层面上均不充分，这将在 1.4 节中进一步讨论。

在讨论之前，我们先对原始提法稍作补充（参见标准综述 [97] 的第 3 节讨论，以及其他文献如 [98-101] 的细节）。以定义在 $AdS_5 \otimes S^5$ 上的 IIB 型超弦理论与 AdS_5 边界上的 $\mathcal{N}=4$ SYM 理论为例。首先考虑在平坦 $\mathbb{R}^{1,9}$ 闵可夫斯基时空中的 IIB 型弦理论，以及在此背景下的一组 N_c 个重合的平行 D3-膜。在该系统中，微扰弦理论的激发态对应于闭弦和开弦的振动模式，其中开弦的端点附着在 D3-膜上。若考虑系统在低于特征弦尺度 $(\alpha')^{-1/2} \equiv (l_s)^{-1}$ 的低能量下，仅无质量弦模式可被激发：对于闭弦，这产生一个引力超多重态；对于端点附着在 N_c 个重合 D3-膜的 (3+1) 维世界体上的开弦，则产生一个具有 $SU(N_c)$ 规范群的 $\mathcal{N}=4$ 矢量超多重态。在该背景下，针对这些无质量弦激发的低能量有效作用量可通过积分消除重质量弦模式而示意性地写为：$S_{\text{eff}} = S_{\mathbb{R}^{1,9},\text{bulk}} + S_{\mathbb{R}^{1,3},\text{brane}} + S_{\text{int}}$，其中 $S_{\mathbb{R}^{1,9},\text{bulk}}$ 是引力超多重态的低能量作用量，对应于 $\mathbb{R}^{1,9}$ 上的 IIB 型超引力（SUGRA）加上来自积分消除重质量弦模式的高阶导数修正；$S_{\mathbb{R}^{1,3},\text{brane}}$ 是 N_c 个重合 D3-膜的 $\mathbb{R}^{1,3}$ 世界体上的 $\mathcal{N}=4$ 矢量超多重态的低能量作用量，对应于具有 $SU(N_c)$ 规范群的 $\mathcal{N}=4$ SYM 理论加上类似的高阶导数修正；S_{int} 是体视和膜模式之间的相互作用项。

体视和膜作用量中的高阶导数修正项与 α' 的正幂成正比，而相互作用作用量则与 10 维牛顿引力常数的平方根 $\kappa_{10} \equiv \sqrt{8\pi G_{10}} \sim g_s \alpha'^2$ 的正幂成正比，其中 g_s 是弦耦合常数。因此，在所谓的去耦极限下，即 $\alpha' \equiv l_s^2 \to 0$，保持 N_c、g_s 固定，可得 $S_{\mathbb{R}^{1,9},\text{bulk}} \to S_{\mathbb{R}^{1,9},\text{IIB SUGRA}}$、$S_{\mathbb{R}^{1,3},\text{brane}} \to S_{\mathbb{R}^{1,3},\mathcal{N}=4\text{SYM}}$、$S_{\text{int}} \to 0$，从而得到两个解耦的作用量：$\lim_{\alpha' \to 0\,(\text{fixed } N_c, g_s)} S_{\text{eff}} = S_{\mathbb{R}^{1,9},\text{IIB SUGRA}} + S_{\mathbb{R}^{1,3},\mathcal{N}=4\text{SYM}}$. 对于给定数量 N_c 的重合 D3-膜，控制 $\mathcal{N}=4$ SYM $SU(N_c)$ 规范理论相互作用强度的有效't Hooft 耦合由 $\lambda_t \equiv N_c g_{\text{SYM}}^2 = N_c g_s$ 给出。由于 SYM 理论是共形场论，其't Hooft 耦合在任意能量下保持不变，因此实际上存在无数个不同的 SYM 理论，每一个对应于某个特定的 λ_t 值。

对同一系统的另一种视角如下。N_c 个重合 D3-膜产生的有效引力场为 $\sim N_c g_s (l_s/r)^4$[100,101]。当 N_c 非常大时，即使 g_s 较小，$\lambda_t = N_c g_s \gg 1$，在靠近 D3-膜（即 $r \to 0$）时，引力场非常强，其对背

景时空的反拨效应显著扭曲了时空几何，产生一个曲率流形。在该极限下，需将平坦闵可夫斯基时空中的 D3-膜微扰弦描述替换为对应的黑 3-膜超引力解，其近视界（即近黑膜）几何精确趋近于 $\mathrm{AdS}_5(L)\otimes S^5(L)$，其中 AdS_5 和 S^5 具有相同的曲率半径 L。而在远离黑膜的区域，背景几何仍为 $\mathbb{R}^{1,9}$ 的闵可夫斯基时空。在这两个区域（近黑膜和远黑膜），由于我们假设弦耦合 g_s 较小（可忽略弦圈贡献），通过与之前相同的去耦极限（$l_s \to 0$，固定 N_c、g_s），体视时空仅包含 IIB 型超引力场。

通过比较上述两种视角，在相同的低能量、低弦耦合、大 N_c、强't Hooft 耦合（即 $\alpha' \equiv l_s^2 \to 0$，固定 N_c、g_s，但 g_s 较小，N_c 很大，且 $\lambda_t = N_c g_{\mathrm{SYM}}^2 = N_c g_s \gg 1$）条件下，注意到两种视角的共同元素是定义在 $\mathbb{R}^{1,9}$ 上的 IIB 型超引力，因此推测两种视角中的剩余部分互为对偶：定义在 $\mathbb{R}^{1,3}$（与 AdS_5 边界在共形因子下等价）上的强耦合、大 N_c、$\mathcal{N}=4$ SYM 理论（规范群为 $SU(N_c)$），与定义在 $\mathrm{AdS}_5(L)\otimes S^5(L)$ 上的经典、弱耦合 IIB 型超引力互为对偶。这种对偶性实际上提供了一个详细的数学字典，将在弱耦合下定义在 AdS 时空与紧致流形乘积背景上的经典超引力理论中的物理可观测量计算，转化为在 AdS 流形共形平坦边界上定义的强耦合、大色数共形量子规范场论中的其他可观测量的计算。因此，AdS-CFT 对偶性中的全息概念指的是高维体视时空的引力信息可编码在其边界上。这是 AdS-CFT 对应最弱的形式，也是更广泛的规范-引力对偶性的特例，得到大量独立一致性检验的支持（参见 [97-101]）。AdS-CFT 猜想的最强版本，对应于所谓规范-弦对偶性（比规范-引力对偶性更广，后者可视为前者的低能量极限）的特例，提出该对偶性对任意 g_s 和 N_c 值均成立，因此将定义在 $\mathbb{R}^{1,3}$ 上具有任意't Hooft 耦合和任意色数的 $\mathcal{N}=4$ SYM 理论（规范群为 $SU(N_c)$），与通常以非微扰方式表述的定义在 $\mathrm{AdS}_5(L)\otimes S^5(L)$ 上的完整量子 IIB 型超弦理论（而非仅其经典低能量极限，即 IIB 型超引力）联系起来。此外还假设，体视中的高阶导数/曲率修正对应于对偶 CFT 中的't Hooft 耦合倒数修正，因为根据详细的全息字典，$\alpha'/L^2 = \{l_s/[l_s(N_c g_s)^{1/4}]\}^2 = 1/\sqrt{\lambda_t}$，而体视中的量子弦圈修正对应于对偶 CFT 中的 N_c 倒数修正，因为 $g_s(l_s/L)^4 = g_s\{l_s/[l_s(N_c g_s)^{1/4}]\}^4 = 1/N_c$。

AdS-CFT 全息对偶性的猜想具有一个非常显著的吸引力，即通过详细的数学全息字典，强耦合量子共形场论（CFT）中的复杂非微扰计算可以转化为在更高维弱耦合经典引力理论中的相对简单（尽管并非必然容易）的计算。更一般地，广义的全息规范-引力对偶性并不局限于体视 AdS 时空及其边界上的 CFT。例如，通过考虑在 AdS_5 中存在的有效五维有质量场的反拨效应，这些场与原始十维超引力（SUGRA）无质量模式在 S^5 上的 Kaluza-Klein（KK）降维相关，体视 AdS_5 度规通常会在内部发生变形，有效的五维体视时空几何仅在靠近体视时空边界时渐进地恢复为 AdS_5 度规。通常，渐进 AdS 时空边界上的对偶量子场论（QFT）也会因相关或边际算符的引入而发生相应的变形，这些算符可能打破共形对称性和超对称性，其标度维数通过全息字典与有效五维体视场的质量相关联。在这个意义上，广义的全息规范-引力对偶性将居住在高维渐进 AdS 时空边界上的强耦合 QFT（不一定是共形或超对称的）与体视中经典引力理论及各种物质场的相互作用联系起来，体视时空的几何由这些相互作用动态确定。在全息规范-引力对偶性中，连接体视渐进 AdS 时空与其边界的额外维度扮演了 QFT 重整化群流的能量尺度几何化的角色，其中 QFT 中的低能量/高能量过程分别映射到体视时空的深处/边界附近区域 [105]。

自 1997 年 Maldacena 首次提出以来 [84]，全息规范-引力对偶性已成为过去几十年理论物理学中的

重大突破之一，被广泛应用于研究不同强耦合量子系统的非微扰物理，涵盖了强相互作用 [106-112]、凝聚态系统 [113-118] 以及近期在量子纠缠和信息理论 [119-122] 方面的研究，提供了诸多深刻见解。

1.4 本综述的主要目的

全息规范-引力模型通常分为两类：一类是 extbf 自上而下构造（top-down constructions），其中体视超引力作用来源于已知的超弦理论低能解，且边界上的对应全息对偶理论被精确确定；另一类是 extbf 自下而上构造（bottom-up constructions），其中体视有效作用通常通过现象学输入和考虑构建，旨在更精确地描述某些现实物理系统的各个方面，但在此情况下，确切的全息对偶理论并不明确。实际上，对于自下而上的全息模型，通常假设或推测从自上而下构造中推导出的规范-引力字典的主要特性在一般情况下仍然有效，即对于一个给定的渐近 AdS 解，当体视中爱因斯坦场方程耦合其他场时，边界上应存在某个确定的全息对偶量子场论（QFT）状态。

为了在实践中为不同的现象学目的提供有效支持，自下而上的全息模型应提供明确示例，其中所考虑的体视引力作用能够成功再现目标现象学，并进一步提供新的可验证预测。事实上，正如我们将在本综述中讨论的，可以构建自下而上的全息模型，这些模型能够在与第一性原理的格点量子色动力学（LQCD）模拟结果兼容的前提下，提供定量结果和预测，并对当前无法通过第一性原理分析的 QCD 相图区域提供热力学和传输量的预测。

首先，我们分析热超对称杨-米尔斯（SYM）理论作为强耦合去束缚夸克-胶子等离子体（QGP）的可能“代理”，这一点在全息文献中已被广泛讨论。通常认为，SYM 理论在 QGP 达到的典型温度范围内与量子色动力学（QCD）在某些质的特征上相似，即在所考虑的温度窗口内，两种理论都是强耦合的、去束缚的，拥有非阿贝尔矢量场，这些矢量场对应于在规范群伴随表示下变换的胶子，且它们的剪切粘度与熵密度比值（η/s）具有相当的相似性。

尽管上述观点正确，但它们不足以在 SYM 与 QCD 之间建立可靠联系。事实上，存在无数种不同的全息理论，它们都具有上述列出的特性。实际上，所有规范-引力对偶都是强耦合的，所有具有各向同性和平移不变性的爱因斯坦规范-引力对偶都具有特定的剪切粘度，其值为“（准）普适全息”结果 $\eta/s = 1/4\pi$[46-48]，这清楚地表明，即使对于具有跑动耦合的非共形规范-引力对偶（SYM 理论并非如此，因为它是一个共形场论），全息理论的有效耦合在所有温度尺度上始终较大。因此，经典的规范-引力对偶缺乏渐近自由性，反而具有强耦合的紫外固定点，属于渐近安全而非渐近自由。此外，在高温下存在无数种不同的全息对偶，它们都具有去束缚相。面对这些具有相同一般特征的全息规范-引力对偶的无限退化性，常用以“证明”SYM 理论作为 QGP“代理”的合理性的论据，可能导致这样的结论：这种选择并非明确。可以认为，这种选择更多是因为 SYM 理论是最广为人知且最简单的规范-引力对偶示例，而非其与现实 QGP 之间存在真实的现象学联系。

为了消除全息模型在描述（某些方面的）现实 QGP 时的无限退化性，需要考察更多物理可观测量的行为，而不仅仅是 η/s。在这方面，SYM 等离子体作为一个可行的现象学全息模型被轻易排除，主要原因包括以下几点：SYM 等离子体是共形场论，而 QGP 在重离子碰撞探测的温度范围内具有强烈的非共形性，这一事实使得 SYM 等离子体的状态方程与 LQCD 模拟中得到的 QGP 状态方程完全不同，不仅在定量上存在差异，在质上也截然不同 [123]。实际上，热力学可观测量的无量纲比值，如规范化压力（P/T^4）、能量密度（ϵ/T^4）、熵密度（s/T^3）、声音速度平方（c_s^2）以及迹异常（$I/T^4 = (\epsilon - 3P)/T^4$，对于共形场论恒为零），在 SYM 等离子体中均为常数，而在 QGP 中它们随温度变化表现出非平凡行为。此外，对于共形 SYM 等离子体，整体粘度为零，而 QGP 中的整体粘度预计随温度变化而表现出非平凡行为，在描述重离子碰撞数据时扮演重要角色，正如现象学多阶段模型所推测的那样（见第 1.1 节和图 1.3）。因此，综合考虑热力学平衡可观测量和传输系数，SYM 等离子体在定量和定性上都不是 QGP 的现实模型。

另一方面，全息对偶确实可用于构建有效的规范-引力模型，这些模型能够实际计算多个热力学和传输可观测量，与零重子密度和有限重子密度下最先进的 LQCD 模拟结果显示出显著的定量一致性，同时在传输性质上与当前最先进的现象学多阶段模型推测的重离子碰撞数据非常接近。此外，这些全息模型还为 QCD 相图中当前无法通过第一性原理计算的区域提供了 QGP 的定量预测。本文的主要目的是回顾这些结果，主要通过在所谓的爱因斯坦-麦克斯韦-狄拉克类全息模型中构建的特定自下而上构造，讨论其主要推理过程，并指出其现象学局限性和不足，以及其成功成就。这将在后续章节中展开，第 2 节将讨论热且重子密度强耦合 QGP 的全息应用，第 3 节将回顾一些应用于热且磁化 QGP（零化学势）的全息模型。在最后的第 4 节中，我们将概述本文回顾的要点，并列出未来现象学全息模型应用于 QGP 物理的重要展望。

在本综述中，除非另有说明，我们使用自然单位，其中 $c = \hbar = k_B = 1$，并采用大多数加号的度规签名。

2 热且重子密度高的夸克-胶子等离子体的全息模型

在本节中，我们回顾了以现象学为导向的自下而上全息模型的构建及其主要结果，这些模型旨在对高温和有限重子密度下强耦合夸克-胶子等离子体（QGP）进行定量描述。我们重点探讨一类被称为爱因斯坦-麦克斯韦-狄拉克（EMD）规范-引力模型的全息构造，这类模型迄今为止为描述重离子碰撞中产生的热且重子密度高的 QGP 的平衡热力学和流体力学传输性质提供了最佳的定量全息模型。我们还讨论了 QCD 相图结构的各种预测，包括在高重子化学势下存在一条一阶相变线，该相变线终止于一个临界端点（CEP），将相变线与低重子密度下观察到的平滑交叉区分开来。

2.1 全息爱因斯坦-麦克斯韦-标量场模型

为了获得对 QGP（以及现实世界中其他强耦合物理系统）具有定量描述能力的全息模型，必须在全息设定中打破共形对称性。然而，仅仅打破共形对称性还不足以再现许多 QCD 的结果，因为我们需要对特定的现象学性质进行全息建模，而不仅仅是任意或通用的非共形模型。因此，共形对称性的破缺方式需要以现象学为导向来设计。

获得非共形系统的一种可行方法是自下而上的全息构造，其中模型的自由参数通过某一特定区间内已有的 LQCD 结果加以约束。一旦参数确定，就可以利用该模型进行预测。当然，正如任何有效理论的构建一样，体视作用的函数形式以及体视场的先验设定（ansatz）都必须基于某些对称性和其他物理相关性进行选择，同时结合目标现象学的一组可观测量以及利用全息方法计算这些可观测量的基本规则。

文献 [124-128] 的开创性工作提出了一种极为简洁高效的方法，用于构建对处于平衡态的强耦合 QGP 的定量全息模型。这些工作的基本思路可以概括为如下几个方面：

1. 重点是构建一个近似的全息对偶或仿真器，用于描述强耦合 QGP 在 QCD 去禁闭态下的状态方程，而不试图实现禁闭（例如，强子系统的 Regge 轨迹）、低温下的手征对称性破缺、高温下的渐近自由性，或者将其显式地嵌入弦理论中。在这一构建中，QCD 的状态方程（以及在有限重子密度情况下的二阶重子易感性，参见第 2.1.1 节）用于在有限温度和零化学势下确定自由参数。请注意，只有这些特定的 LQCD 数据用于确定模型的自由参数，所有其他由此产生的热力学量或传输系数都将是该全息构建的预测；

2. 为了实现上述目标，所采用的动态场内容和整体引力作用的泛函形式是尽可能简单的。考虑一个体积度规场（全息地对偶于边界 QFT 的能量-动量张量），以及一个麦克斯韦场，其时间分量的边界值提供了对偶 QFT 中的化学势。此外，一个实标量场（称为膨胀子）用于在全息设定中破坏共形对称性，从而模拟零化学势下 QGP 的状态方程。膨胀子场还将弦框架和爱

因斯坦框架联系起来，正如例如在全息计算部分子能量损失时使用的那样（关于这方面的一些结果将在第 2.1.2 节中简要回顾）；

3. 通过动态场内容构造的整体引力作用的泛函形式最多包含两个场的导数。该体积作用包括带有负宇宙学常数（与渐近 AdS5 时空相关）的爱因斯坦-希尔伯特项，用于度规场 $g_{\mu u}$，阿贝尔规范场 A_μ 和膨胀子场 ϕ 的动力学项，膨胀子场的几乎任意势函数 $V(\phi)$，以及麦克斯韦场和膨胀子场之间的相互作用项，这个项包含膨胀子场的另一个自由函数 $f(\phi)$。这些自由函数 $V(\phi)$ 和 $f(\phi)$，有效的 5 维牛顿常数 G_5，以及非共形模型的特征能量尺度 $\Lambda \propto L^{-1}$ 需要通过全息匹配上述 LQCD 结果的特定集合来动态确定。需要注意的是，这些参数构成了自下而上 EMD 构造的所有自由参数集合；

4. 假设介质中动态夸克的效应通过自下而上模型的参数有效编码，这些参数通过全息匹配 QCD 状态方程和从 LQCD 模拟中得到的零化学势下的二阶重子易感性来确定（在本文回顾的全息 EMD 模型中，没有显式使用味夸克膜来实现这一点）。

有关上述方法的更多细节将在第 2.1.1 节中讨论。现在，我们来评论这种方法的主要局限性，其中一些局限性较为普遍，适用于所有经典规范-引力模型。

首先，上述规范-引力模型缺乏渐近自由性。这是 AdS-CFT 对应关系中预期的结果，因为体视中的经典引力缺乏来自大质量弦态和量子弦圈的贡献。通过忽略体视中的这些贡献，边界上得到的是一个具有大量自由度（大 N_c）的强耦合对偶量子场论（QFT）。考虑体视几何的变形（例如渐近但非严格的 AdS 解）似乎不足以声称这些变形原则上能够描述边界规范理论中的渐近自由性。在各向同性和平移不变的规范-引力模型中，无论是否具有共形性，只要度规场具有二阶导数，剪切粘度与熵密度比值 $\eta/s = 1/4\pi$ 对于任何温度（和化学势）都成立，这清楚地表明此类模型在所有能量尺度上都是强耦合的。因此，这些模型在紫外区域缺乏渐近自由性。显然，这与高温下预期的微扰量子色动力学（QCD）形成鲜明对比，在微扰 QCD 中，η/s 的值比 $1/4\pi$ 大一个数量级。改进这种情况的一种可能方法已在文献 [129] 中讨论。他们考虑了体视中存在膨胀子场时，度规场的高阶曲率修正（即爱因斯坦引力的高阶导数修正）的影响，这允许 η/s 随温度变化。体视作用的高阶导数修正与来自大质量弦态的贡献相关，这些贡献预计会导致边界 QFT 理论有效耦合的减少。然而，在考虑高阶曲率项对背景几何的完全动态反应的前提下，始终如一地引入 EMD 模型的高阶导数曲率修正是一项极具挑战性的任务，尚未完成。

规范-引力模型用于 QCD 的另一个普遍局限性是，难以实现对强子气（HRG）禁闭相中热力学和流体力学可观测量的现实全息描述。标准的规范-引力模型描述的是大 N_c 系统。然而，在 QCD 介质的禁闭强子相中，压强表现为 $\sim N_c^0 = O(1)$，而在去禁闭的 QGP 相中，压强表现为 $\sim N_c^2$。因此，在大 N_c 展开中，强子相的压强相对于 QGP 相的压强被 N_c^{-2} 抑制。从形式上看，强子相需要体视中的弦圈修正，以便在边界上具有可行的全息对偶描述。这种经过量子弦圈修正的全息对偶将远比简单的经典规范-引力模型复杂得多。

上述两个局限性是所有旨在真实描述 QCD 的规范-引力模型共有的。此外，与本文回顾的 EMD 构造相关的其他局限性也存在。我们已经提到，这类模型并不旨在描述手征对称性破缺、禁闭以及强子谱。这些局限性，连同规范-引力模型在描述强子热力学和渐近自由性方面的固有局限性，清楚地限制了 EMD 模型的目标现象学，仅限于重离子碰撞中产生的强耦合 QGP 对应的 QCD 物质的热去禁闭相。

EMD 模型的另一个现象学局限性在于它们只描述了一个守恒电荷（即仅考虑了一个有限的化学势；在全息设置中，实际上可以考虑多个守恒电荷和不同的全球对称性模式，通过引入多个麦克斯韦场或在体视中考虑杨-米尔斯场，然而在本回顾中，我们专注于简单的 EMD 模型——在结论中会简要提到将全息现象学方法扩展到更一般的自下而上的构造的前景）。通常，考虑的是有限的重子化学势 μ_B（参见第 2.1.1 节）。然而，在低能相对论重离子碰撞中产生的热重子密度 QGP 实际上包含三个化学势（μ_B、电荷化学势 μ_Q 和奇异性化学势 μ_S）。在平衡态下，这些化学势通过碰撞中的全球奇异性中性条件相互关联，因为碰撞的原子核不携带净奇异性。奇异性中性条件为：

$$\langle S \rangle = \langle N_{\bar{S}} - N_S \rangle = VT^3 \hat{\chi}_S^1 = 0,$$

其中 N_S 是奇异夸克的数目，$N_{\bar{S}}$ 是奇异反夸克的数目，$\hat{\chi}_S^1 \equiv \frac{\partial(P/T^4)}{\partial(\mu_S/T)}$ 是缩放的奇异性密度。

此外，μ_Q 还可以通过碰撞核的电荷与重子数比来约束。对于 LHC 上的铅-铅（Pb+Pb）碰撞和 RHIC 上的金-金（Au+Au）碰撞，存在轻微的同位旋不对称性：

$$\frac{\langle Q \rangle}{\langle B \rangle} = \frac{\langle N_Q - N_{\bar{Q}} \rangle}{\langle N_B - N_{\bar{B}} \rangle} = \frac{\hat{\chi}_Q^1}{\hat{\chi}_B^1} = \frac{Z}{A} \approx 0.4,$$

其中 Z 是碰撞核的原子序数，A 是质量数。因此，通过奇异性中性和电荷守恒，可以确定 $\mu_Q = \mu_Q(T, \mu_B)$ 和 $\mu_S = \mu_S(T, \mu_B)$[130–136]。然而，这些来自重离子碰撞的现象学约束并没有在回顾中讨论的全息 EMD 模型中实现，其中简单地设置了 $\mu_Q = \mu_S = 0$。

我们通过指出这些全息 EMD 模型部分受到弦理论启发，但并非实际上来源于弦理论，来结束对 QGP 现象学自下而上的全息 EMD 模型的介绍。因此，可能会有人质疑这些构造中全息字典的实际适用性，更一般地，对于任何自下而上的规范-引力模型也是如此。实际上，通过与目标现象学结果的直接比较，可以检验自下而上的全息模型的现象学可行性。全息 EMD 模型与若干第一性原理 LQCD 计算结果的符合程度，以及通过现象学多阶段模型描述的重离子数据推导出的流体力学粘度，为这些模型在实践中全息字典能够有效工作的提供了有力证据。

上述的一般推理可以系统地调整，用于成功描述现象学的不同方面，表明至少全息字典中的一些条目可能具有广泛的有效性。例如，可以考虑使用规范-引力模型来描述纯杨-米尔斯理论（不考虑动力学夸克）。具有特定形式的膨胀子势的自下而上的规范-引力模型可以被设计用于定量描述去禁闭纯胶子等离子体的热力学，并具有一阶相变（尽管经典规范-引力模型无法描述禁闭相对应的胶球气体的热力学），此外还可以描述胶球谱学 [124, 125, 137, 138]。

2.1.1 全息状态方程

规范-引力模型通常通过其在全息对偶的经典引力侧的动作来定义，而其边界上居住的对偶量子场论（QFT）的不同动态情况与体视空中渐进 AdS 的边界条件和场方程的假设（ansatz）相关。例如，给定某个体动作，对偶 QFT 的真空态与体方程的解相关，这些解没有事件视界，这是通过一个不含黑化函数的度规场假设实现的。对于同一对偶 QFT 的平衡热态，通常与体方程的平衡黑洞（或更一般的黑膜）解相关，此时需要度规场的假设中包含黑化函数。流体力学输运系数和特征平衡时间尺度可以通过黑洞解的准正则模谱 [139-141] 来评估，这些黑洞解略微偏离热平衡状态，而远离平衡的动态可以通过考虑体场的边界条件和假设来模拟，这些边界条件和假设在平行于边界的时空方向上具有非平凡依赖性 [142]。

本文回顾的主要自底向上全息模型由 EMD 类动作指定，其体内的通用形式如下 [127,128]：

$$S = \int_{\mathcal{M}_5} d^5x\mathcal{L} = \frac{1}{2\kappa_5^2}\int_{\mathcal{M}_5} d^5x\sqrt{-g}\left[R - \frac{(\partial_\mu\phi)^2}{2} - V(\phi) - \frac{f(\phi)F_{\mu u}^2}{4}\right], \tag{1}$$

其中 $\kappa_5^2 \equiv 8\pi G_5$ 是五维引力常数。体动作（2.3）由两个边界项补充：i) 吉本斯-霍金-约克（GHY）边界动作 [143,144]，在具有边界的流形 $\mathcal{M}_5$（如渐进 AdS 时空）中，用于定义具有度规场 Dirichlet 边界条件的变分问题；ii) 边界反项动作，用于通过全息重整化过程移除壳上动作的紫外发散 [146-151]。尽管这些边界项对于编写完整的全息重整化壳上动作是必要的，但它们不影响体方程的运动，因此在本文回顾的计算中并非严格必需，故在此不列出其具体形式。

需要指出一些一般性说明。全息重整化壳上动作通常用于评估边界上对偶 QFT 介质的压力和能量密度（能量-动量张量期望值的对角元素），以及从体场扰动中提取的流体力学输运系数和远离平衡动态的分析 [152,153]。然而，本文不考虑远离平衡的计算。关于介质的平衡压力，其计算也可以通过对贝肯斯坦-霍金黑洞热力学关系的熵进行温度积分来完成，而无需全息重整化。此外，对于本文回顾的特定流体力学输运系数的全息计算，这些系数通过 Kubo 公式与相关对偶 QFT 算符的热延迟关联函数的虚部相关，可以通过使用从相关体扰动方程中提取的径向守恒通量来绕过全息重整化，见 [128] 和 [126,154,155].

全息重整化过程通常是一项非常繁琐的工作，而前述的简化方法无疑为通过全息方法获取某些物理观测量提供了更为便捷的途径。然而，如果不实施全息重整化过程，就必须面对一些局限性。除了前文提到的限制外，另一个重要的局限性在于：尽管可以利用热力学关系式（2.21）计算能量密度，但更为重要的是，需要通过全息重整化壳上作用计算压力和能量密度，并分别利用贝肯斯坦-霍金关系式（2.15）独立计算熵密度，以及通过体 Maxwell 场的径向共轭动量的边界值独立计算电荷密度（如式 2.16），以显式检验式（2.21）的成立。虽然对于文献 [127,128,156-164] 中的 EMD 模型尚未实现全息重整化，但最近文献 [165,166] 已对 EMD 模型实现了该过程，并成功完成了上述一致性检验。此外，对于文献 [160-163] 中的 EMD 模型，还通过 Gibbs-Duhem 方程，利用在固定

化学势下对贝肯斯坦-霍金熵密度的温度积分计算压力，并检验其与在固定温度下对重子密度的化学势积分（加上由零化学势下熵密度温度积分得到的积分常数）是否一致，从而实现了热力学一致性的非平凡检验。这一检验非常重要，因为熵密度和重子电荷密度分别是全息字典在体几何两端评估的不同物理量。

自底向上的 EMD 模型中的自由参数和函数集合 $\{G_5, \Lambda, V(\phi), f(\phi)\}$ 可以通过选取合适的格点 QCD 有限温零化学势（且无电磁场）热力学结果作为现象学输入来确定 [156,160]。其中，Λ 是非共形全息模型的特征能标，用于将对偶 QFT 中的有量纲观测量（以 MeV 为单位）与全息引力侧以 AdS 半径 L 的倒数幂次计算的结果对应起来。实际计算中，通常取 $L = 1$，并用能标 Λ 替代自由参数 L，从而不改变模型的自由参数个数 [156,160]。集合 $\{G_5, \Lambda, V(\phi)\}$ 可通过零化学势下的 LQCD 状态方程确定，而 $f(\phi)$ 则可通过零化学势下的 LQCD 二阶重子易变性（至归一化常数）确定 [127,156,160]。

为此，首先需要为体 EMD 场指定合适的假设，以描述对偶边界规范场论（如 LQCD 模拟）中的各向同性和平移不变的热态。由于我们还将考虑有限重子化学势下的热态，体场的形式取为各向同性、平移不变且带电的 EMD 黑洞平衡背景 [127,156,160]：

$$ds^2 = g_{\mu u} dx^\mu dx^\nu = e^{2A(r)} \left[-h(r)dt^2 + d\vec{x}^2 \right] + \frac{dr^2}{h(r)}, \quad \phi = \phi(r), \quad A_\mu dx^\mu = \Phi(r)dt, \tag{2}$$

其中 r 为全息径向坐标，边界位于 $r \to \infty$，黑洞视界位于 $r = r_H$，且 r_H 为黑化函数的最大根，即 $h(r_H) = 0$。通过对 EMD 体作用（2.3）对各场变分，可得一般 EMD 方程组 [167]：

$$R_{\mu u} - \frac{g_{\mu u}}{3} \left[V(\phi) - \frac{f(\phi)}{4} F_{\alpha\beta}^2 \right] - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{f(\phi)}{2} g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} = 0, \tag{3}$$

$$\partial_\mu \left(\sqrt{-g} f(\phi) g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \right) = 0, \tag{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g} g^{\mu u} \partial_\nu \phi \right) - \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} - \frac{F_{\mu u}^2}{4} \frac{\partial f(\phi)}{\partial \phi} = 0, \tag{5}$$

对于平衡下的各向同性 EMD 场假设（2.4），上述方程组化为以下一组耦合常微分方程：

$$\phi''(r) + \left[\frac{h'(r)}{h(r)} + 4A'(r) \right] \phi'(r) - \frac{1}{h(r)} \left[\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} - e^{-2A(r)} \frac{\Phi'(r)^2}{2} \frac{\partial f(\phi)}{\partial \phi} \right] = 0, \tag{6}$$

$$\Phi''(r) + \left[2A'(r) + \frac{d[\ln f(\phi)]}{d\phi} \phi'(r) \right] \Phi'(r) = 0, \tag{7}$$

$$A''(r) + \frac{\phi'(r)^2}{6} = 0, \tag{8}$$

$$h''(r) + 4A'(r)h'(r) - e^{-2A(r)} f(\phi) \Phi'(r)^2 = 0, \tag{9}$$

$$h(r) \left[24A'(r)^2 - \phi'(r)^2 \right] + 6A'(r)h'(r) + 2V(\phi) + e^{-2A(r)} f(\phi) \Phi'(r)^2 = 0, \tag{10}$$

其中最后一式为约束条件。这些方程在文献 [127,156,160] 中有详细讨论。上述方程组需通过数值方法求解，相关算法已在文献 [127,156,160,161] 中不断完善。实际计算中，常用两套坐标系：一是

标准坐标（带波浪号），此时黑化函数在边界趋于 1，$\tilde{h}(\tilde{r}\to\infty)=1$，且 $\tilde{A}(\tilde{r}\to\infty)\to\tilde{r}$，便于以标准形式表达物理观测量的全息公式；二是数值坐标（无波浪号），通过对标准坐标的重标度，便于指定黑洞视界径向位置及体场在视界附近的红外展开系数，从而以视界为起点进行数值积分。实际上，通过这种重标度，所有红外系数都可用两个初始未定系数 ϕ_0 和 Φ_1 表示，分别对应于视界处的 dilaton 场值和 Maxwell 场径向导数值，作为常微分方程组的初始条件。

为计算边界量子场论（QFT）的物理观测量，需要获取体场在远离视界、靠近边界的紫外展开系数。在本文讨论的观测量评估中，仅需确定体场的四个紫外展开系数：度规场黑化函数 $h(r)$ 的系数 h_0^{far}、Maxwell 场非平凡分量 $\Phi(r)$ 的系数 Φ_0^{far} 和 Φ_2^{far}，以及 dilaton 场 $\phi(r)$ 的系数 ϕ_A。这些紫外展开的函数形式通过求解靠近边界的渐进运动方程得到 [127]。为确定给定初始条件对 (ϕ_0,Φ_1) 生成的数值解对应的紫外系数数值，需将体场的完整数值解与靠近边界的紫外展开函数形式进行匹配。其中，h_0^{far}、Φ_0^{far} 和 Φ_2^{far} 的数值较易获取，但由于 dilaton 场在边界附近呈指数衰减，ϕ_A 的评估更为复杂且需谨慎处理 [127,156]。文献 [156,160] 提出了不同算法，以可靠且数值稳定的方式从 dilaton 场靠近边界的数值解中提取 ϕ_A，并逐步提高了精度和精确度。此外，文献 [161] 提出了一种新算法，用于选择初始条件 (ϕ_0,Φ_1) 的网格，从而在 (T,μ_B)-平面上更高效、广泛地覆盖对偶 QFT 的相图，优于早期工作（如 [156–159]）。结合对零化学势下 LQCD 结果的更精确拟合，文献 [160] 构建了有限温度和重子密度下改进的 EMD 模型。上述算法改进使得改进的 EMD 模型不仅能够预测临界端点（CEP）的位相 [160]，还可确定一级相变线的位置，并计算 (T,μ_B)-平面广域内的热力学 [161] 和输运 [162] 观测量，包括相变区域。尽管在相变区域由于竞争黑洞解分支的共存和数值解中显著的噪声，数值计算尤为困难，但这些改进仍实现了可靠的预测。

在比较文献中不同版本 EMD 模型的若干热力学结果、展示上述改进并讨论其对全息预测 QCD 相图结构（在 (T,μ_B) 平面上）的影响之前，现给出在全息对偶引力侧计算这些物理量的相关公式。通过对不同初始条件对 (ϕ_0,Φ_1) 下的体方程进行求解，获得热平衡下 EMD 场的数值解，这些解通过全息字典与边界 QFT 中的特定热态一一对应。在这些热态下，介质的温度 T、重子化学势 μ_B、熵密度 s 和重子电荷密度 ρ_B 分别由下式给出 [127,156]：

$$T=\left.\frac{\sqrt{-g'_{\tilde{t}\tilde{t}}g'_{\tilde{r}\tilde{r}}}}{4\pi}\right|_{\tilde{r}=\tilde{r}_H}=\frac{e^{A(\tilde{r}_H)}}{4\pi}|h'(\tilde{r}_H)|\Lambda=\frac{1}{4\pi}\phi_A^{1/\nu}\sqrt{h_0^{\mathrm{far}}}\Lambda, \tag{2.13}$$

$$\mu_B=\lim_{\tilde{r}\to\infty}\Phi(\tilde{r})\Lambda=\frac{\Phi_0^{\mathrm{far}}}{\phi_A^{1/\nu}\sqrt{h_0^{\mathrm{far}}}}\Lambda, \tag{2.14}$$

$$s=\frac{S}{V}\Lambda^3=\frac{A_H}{4G_5V}\Lambda^3=\frac{2\pi}{\kappa_5^2}e^{3A(\tilde{r}_H)}\Lambda^3=\frac{2\pi}{\kappa_5^2}\phi_A^{3/\nu}\Lambda^3, \tag{2.15}$$

$$\rho_B=\lim_{\tilde{r}\to\infty}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\tilde{r}}\Phi)}\Lambda^3=-\frac{\Phi_2^{\mathrm{far}}}{\kappa_5^2}\phi_A^{3/\nu}\sqrt{h_0^{\mathrm{far}}}\Lambda^3, \tag{2.16}$$

其中 A_H 为黑洞视界面积，撇号表示对径向坐标的导数，$\nu \equiv d - \Delta$，$d = 4$ 为边界时空维数，$\Delta = (d + \sqrt{d^2 + 4m^2L^2})/2$ 为与体 dilaton 场 $\phi(r)$ 对偶的 QFT 算符的标度维数，m 为 dilaton 场的质量，可由势能 $V(\phi)$ 确定。

无量纲的二阶重子易变性定义为

$$\hat{\chi}_B^2 \equiv \frac{\chi_B^2}{T^2} \equiv \frac{\partial^2(P/T^4)}{\partial(\mu_B/T)^2}, \tag{2.17}$$

在 $\mu_B = 0$ 时，其积分表达式为 [127,156]：

$$\hat{\chi}_B^2(T, \mu_B = 0) = \frac{1}{16\pi^2}\frac{s}{T^3}\frac{1}{f(0)}\int_{r_H}^{\infty} dr\, e^{-2A(r)} f(\phi(r))^{-1}, \tag{2.18}$$

该积分在 EMD 背景下计算，初始条件取 $\Phi_1 = 0$。在实际数值计算中 [156,160,161]，式 (2.18) 中的 r_H 和 ∞ 分别用 r_{start} 和 $r_{\max}$ 代替，其中 r_{start} 为避免 EMD 方程在数值视界 $r_H = 0$ 处奇点而选取的极小值（通常 $r_{\text{start}} \sim 10^{-8}$），$r_{\max}$ 为径向边界的数值近似（理想情况下为 $r \to \infty$），实际取 $r_{\max} \sim 2 - 10$ 即可使 EMD 背景达到全息重整化群流的紫外固定点。需要强调的是，式 (2.18) 仅适用于 $\mu_B = 0$。对于有限 μ_B 的二阶重子易变性，实际采用

$$\hat{\chi}_B^2 = \frac{\partial(\rho_B/T^3)}{\partial(\mu_B/T)}, \tag{2.19}$$

其中 ρ_B 为重子密度。

对于尚未实现全息重整化的全息模型，无法直接从重整化壳上边界作用中提取压强（及能量密度），因为该量尚不可用。然而，在这种情况下，可以近似地将对偶 QFT 流体的压强表示为（对固定 μ_B）：

$$P(T, \mu_B) \approx \int_{T_{\text{low}}}^{T} dT\, s(T, \mu_B), \tag{2.20}$$

其中 T_{low} 为所有不同 μ_B 解对应的最低温度。对于 $T \sim T_{\text{low}}$，式 (2.20) 不再是压强的良好近似。介质的能量密度可由热力学关系给出：

$$\epsilon(s, \rho_B) = T s(T, \mu_B) - P(T, \mu_B) + \mu_B \rho_B(T, \mu_B). \tag{2.21}$$

对偶 QFT 边界处的能量-动量张量的迹异常（也称为相互作用量度）由下式给出：

$$I(T, \mu_B) = \epsilon(T, \mu_B) - 3P(T, \mu_B).ag2.22 \tag{11}$$

介质中声速平方沿 (T, μ_B) 平面上不同恒熵-重子数轨迹的定义为：

$$c_s^2 = \left(\frac{dP}{d\epsilon}\right)_{s/\rho_B}. \tag{12}$$

在重离子碰撞的唯象应用中，可将 c_s^2 改写为 (T,μ_B) 的导数形式 [168,169]：

$$\left[c_s^2(T,\mu_B)\right]_{s/\rho_B}=\frac{\rho_B^2\partial_T^2P-2s\rho_B\partial_T\partial_{\mu_B}P+s^2\partial_{\mu_B}^2P}{(\epsilon+P)\left[\partial_T^2P\partial_{\mu_B}^2P-(\partial_T\partial_{\mu_B}P)^2\right]},ag2.23 \tag{13}$$

该表达式更为方便，因为大多数状态方程以 (T,μ_B) 为自由变量。

上述公式可用于计算表征夸克-胶子等离子体（QGP）平衡态的主要热力学观测量。为确定 EMD 模型的自由参数，采用最先进的连续外推 LQCD 模拟结果（2+1 味，物理夸克质量）作为唯象输入，包括 QCD 状态方程 [14] 和零化学势下的二阶重子易变性 [170]。事实上，选择适当的易变性为自底向上的 EMD 模型提供了关于介质控制状态变量（除温度外）的唯象信息 [19]。基于此，文献 [160] 构建了第二代改进 EMD 模型（相较于文献 [127,128] 中的原始模型及 [156–159] 中的第一代改进模型），并在 [161–163] 中进一步应用。该模型由体作用（2.3）定义，采用以下全息固定的自底向上参数和函数：

$$V(\phi)=-12\cosh(0.63\phi)+0.65\phi^2-0.05\phi^4+0.003\phi^6,\quad \kappa_5^2=8\pi G_5=8\pi(0.46),\quad \Lambda=1058.83\,\mathrm{MeV}, \tag{2.24}$$

$$f(\phi)=\mathrm{sech}(-0.27\phi+0.4\phi^2)+1.7\mathrm{sech}(100\phi)^{2.7}. \tag{2.25}$$

关于上述确定的 dilaton 势能 $V(\phi)$ 和 Maxwell-dilaton 耦合函数 $f(\phi)$，需作以下说明：

首先，关于 dilaton 势能，基于 EMD 场的紫外渐进展开，已知 dilaton 场在边界处对相关 QFT 形变趋于零 [127]，因此边界值需满足 $V(0)=-12=2\dot{\Lambda}_{\mathrm{AdS}_5}$，以在紫外区域恢复 AdS_5 的负宇宙常数（$\Lambda_{\mathrm{AdS}_{d+1}}=-d(d-1)/(2L^2)=-6$，其中 $d=4$，$L=1$，渐进 AdS 半径设为 1）。由 (2.24) 可知，该 EMD 模型的 dilaton 场质量平方为 $m^2=\partial_\phi^2V(0)\approx-3.4628$，满足 Breitenlohner-Freedman（BF）稳定性界限 [171,172]：$m^2>m_{\mathrm{BF}}^2=-d^2/(4L^2)=-4$。此外，对偶 QFT 算符的标度维数为 $\Delta=(d+\sqrt{d^2+4m^2L^2})/2\approx2.73294<d=4$，因此 $\nu\equiv d-\Delta\approx1.26706$，表明这是一个触发从 AdS_5 紫外固定点向非共形态重整化群流的关联算符。对应地，在引力侧，从靠近边界到体内部，QFT 从紫外到红外区域发生非共形转变。为引入偏离紫外共形态的相关形变并满足 BF 稳定性界限，需设计 dilaton 势能使 $\Delta_{\mathrm{BF}}=2<\Delta<d=4$，或等价地，$m_{\mathrm{BF}}^2=-4<m^2<0$。此外，(2.24) 中的 dilaton 势能从边界最大值单调递减至体几何深红外区域，确保体运动方程在边界与黑洞视界间无奇点（与势能局部极值相关），并满足 Gubser 经典引力奇点准则 [173]：$V(\phi(r_H))\leq V(\phi(r\to\infty)=0)=-12$。

其次，关于 Maxwell-dilaton 耦合函数，由 (2.18) 可知，零化学势下计算的重子易变性无法确定 $f(\phi)$ 的整体归一化常数。在 (2.25) 中，遵循 [127] 的建议，选择 $f(0)=1$。与 [127] 一致，$f(\phi)$ 在红外区域（大 $\phi(r)$）渐进趋于零。然而，与 [127] 不同，为在零化学势下对该观测量进行定量描述，需设计 $f(\phi)$ 使其在靠近边界处（即 $\phi(r\to\infty)\to0$）呈现快速变化。这一特性在其他自底向上 EMD 模型中也观察到，这些模型采用不同 $f(\phi)$ 形式，并已证明能定量描述 2+1 味、物理夸克质量 LQCD

模拟的 $\chi_B^2(T, \mu_B = 0)$ [164,165]。

在图 2.1 中，展示了三种不同 EMD 模型在全息拟合上的改进，目标数据为零化学势下 LQCD 的二阶重子易变性结果，网格结果的改进也可见（详见图注）。通过 (2.18) 在零化学势、有限温度 EMD 背景下计算，(2.25) 中的 $f(\phi)$ 轮廓被设计以生成图 2.1 底图结果。EMD 背景采用 (2.24) 中的参数选择，这些参数为生成图 2.2 中 $\mu_B = 0$ 的全息状态方程结果而固定。图 2.2 显示的完整 LQCD 结果用作模型输入。特别地，基于全息模型难以在整个温度区间内定量重现 LQCD 的迹异常结果。

通过根据图 2.2 中显示的结果，固定方程 (2.24) 中 $\mathbf{V}(\phi)$ 的自下而上的 EMD 参数，以及根据图 2.1 底部面板中显示的结果，固定方程 (2.25) 中 $\mathbf{f}(\phi)$ 的参数，可以继续进行强耦合 QGP 物理学相关观测量的全息预测。除了使用在 $\mu_B = 0$ 时的 LQCD 特定结果来确定 EMD 模型的自由参数外，任何其他计算都可以作为所考虑的全息设定的合法预测。

为了填充模型的相图，使用初始条件 $(\phi_0, \Phi_1/\Phi^1_{extmax})$ 来数值生成多个 EMD 黑洞解，如图 2.3 的两个顶层面板所示 [161]，其中 $\Phi^1_{extmax} = \sqrt{-2V(\phi_0)/f(\phi_0)}$ 是给定 $\phi_0 > 0$ 时 Φ_1 的最大值的限制（该条件仅生成正的胶度场值），从而得到渐近 AdS5 解 [127]。对应的全息 EMD 模型对于有限温度和重子化学势下 QCD 状态方程的预测也显示在图 2.3 中，并与有限重子密度下的最先进 LQCD 结果进行了比较（其中 $\mu_Q = \mu_S = 0$，如全息模型所示）[82]。可以注意到，EMD 全息预测与 LQCD 结果在有限 (T, μ_B) 下的 QCD 状态方程之间有良好的定量一致性，除了对于 $T \gtrsim 190$ MeV 和 $\mu_B/T \gtrsim 2$ 时的重子电荷密度外。需要强调的是，图 2.3 中显示的全息预测是由 2017 年 [160] 中的全息 EMD 模型得出的，这比 [82] 中 LQCD 结果的发表早了四年。据我们所知，这是文献中第一个，既包括全息也包括非全息的模型，在定量层面上正确预测了该先进 LQCD 有限温度和重子化学势下的 QCD 状态方程行为。在这方面，还值得指出的是，在同一篇 2017 年论文 [160] 中，提出了在零化学势下更高阶重子易感度的全息预测，并在一年后由 [177] 中的 LQCD 模拟进行了定量验证，如图 2.4 的顶层面板所示。这一点特别重要，因为它展示了全息 EMD 模型的部分预测能力，因为高于第二阶的重子易感度在零化学势下并未被用来确定模型的自由参数和函数。因此，更高阶的重子易感度的结果作为 EMD 模型的实际全息预测得出。

通过对参考文献 [160] 中 EMD 模型相图的广泛扫描，最终获得了不仅包含跨越区域和该论文中最初报告的临界点（CEP），还包括在 CEP 处终止的一级相变线的相图。得益于该工作中显著的算法和数值改进，能够计算相图中各个相变区域的物理可观测量。EMD 模型对于 QCD 相图在 (T, μ_B)-平面中的预测显示在图 2.4 的下面板中，预测的 CEP 位置约为 (T, μ_B) (89, 724) MeV。不同的曲线表示交叉区域的特征点（极值或拐点），这些点随着 的变化而演化，最终在 CEP 处汇聚 [162]。CEP 的位置还恰好与具有相同 (T, μ_B) 值的多重黑洞解的共存区域的终点相吻合，如图 2.3(b) 所示。在该共存区域内，热力学稳定分支的黑洞解指的是具有最大压力（或等效地，最小自由能）的背景解。在参考文献 [161] 中，还计算了跨越一级相变线时所有热力学可观测量的跳跃间隙。

我们注意到，当前的格点 QCD 结果并未唯一确定 $\mathbf{V}(\phi)$ 和 $\mathbf{f}(\phi)$ 的功能形式。同一组在 $\mu_B = 0$ [14, 170] 的 LQCD 结果，不仅用于确定参考文献 [160–163] 中 EMD 模型的狄拉通势和 Maxwell-狄拉通耦合函数，还被用于确定参考文献 [164] 中提出的 EMD 模型中 $\mathbf{V}(\phi)$ 和 $\mathbf{f}(\phi)$ 的不同功能形式。他们发现，这些形式同样能与 LQCD 结果实现良好的定量拟合，并且对与体视狄拉通场对偶的量子场论算符的标度维数 Δ 的测定结果与 [160] 接近（$\Delta \approx 2.73294$），即 $\Delta \approx 2.769$。尽管参考文献 [164] 的 EMD 模型尚未与有限 μ_B 的 LQCD 结果进行比较，但它预测相图中的 CEP 位置与 [160] 不同，即 (T, μ_B) [1702.06731] CEP $\approx (111.5 \pm 0.5, 611.5 \pm 0.5)$ MeV。

最近，参考文献 [165] 提出了另一个竞争的 EMD 模型，利用 HotQCD 协作组在有限温度和 $\mu_B = 0$ 下的 LQCD 状态方程结果来确定 $\mathbf{V}(\phi)$。对于重子敏感度，他们采用 Wuppertal-Budapest 的结果 [82] 来确定 $\mathbf{f}(\phi)$，并通过构造要求量子场论算符与狄拉通场的标度维数 $\Delta = 3$。直到 2022 年的这项工作 [165] 之前，仅使用 Wuppertal-Budapest 的 LQCD 结果。尽管 Wuppertal-Budapest 和 HotQCD 协作组的结果在大多数情况下是一致的，但在较高温度下仍存在定量差异，且 HotQCD 的误差条略大。参考文献 [165] 的结果还生成了一种全息状态方程，与参考文献 [82] 中有限温度和重子化学势的最新 LQCD 结果以及参考文献 [166] 中更高阶重子敏感度的格点结果实现了良好的定量一致，但 CEP 位置再次不同，即 (T, μ_B) [2201.02004] CEP $\approx (105, 555)$ MeV。

在图 2.5 中，我们展示了上述三个竞争的自底向上 EMD 模型对 QCD CEP 的全息预测，这些模型与现有的最先进 LQCD 结果定量一致，同时对 QCD 相图中仍无法通过第一性原理 LQCD 模拟的区域提供了不同预测。这三个 EMD 模型在 Maxwell-狄拉通耦合函数 $\mathbf{f}(\phi)$ 在边界附近的行为上表现出非常快速的变化，这似乎是与具有 2+1 味道和物理夸克质量的全息 EMD 描述相关的稳健特征。这些结果表明，需要更系统地研究全息 EMD 模型对 QCD 临界端点位置的定量预测结构。这可以通过对全息 EMD 模型的贝叶斯分析来实现，初步结果将在第 2.1.3 节中简要提及。

在结束本节之前，我们指出，严格来说，EMD 模型中的上述相变没有明确的序参量。这些相变是热力学意义上的实际相变，对应于 (T, μ_B) 平面上压力非解析且与其泰勒展开不匹配的区域。在压力的一阶导数（如熵和电荷密度）发生不连续变化的区域，存在一阶相变；而在这些导数出现无穷斜率的区域，导致压力的二阶导数（如重子敏感度和比热）发散的区域，存在二阶相变。在图 2.4 的底部面板中，蓝线表示参考文献 [160–163] 中 EMD 模型的一阶相变线，其终止于对应于该模型二阶临界点的红点。由于这里讨论的 EMD 模型与热和重子密集 QCD 相图的有效全息描述相关，预期这些相变应与解禁和/或手征相变相关。然而，在具有动态费米子的 QCD 中（如同这里讨论的 EMD 模型所模拟的），解禁转变没有明确的序参量，因为 Polyakov 环仅在纯 Yang-Mills 理论中是实际序参量 [19]。此外，由于 QCD 中的手征对称性并非精确，手征凝聚物也不是手征相变的精确序参量。尽管如此，为了计算手征凝聚物，需要在模型中添加额外的体视标量场，该场在对偶边界量子场论中充当手征凝聚物的源。

2.1.2 全息输运系数

全息规范-引力对偶理论在研究强耦合夸克-胶子等离子体（QGP）时，除了能够评估有限温度和重子密度下的热力学观测量外，还能计算作为流体力学微观输入的输运系数，以及其他微观性质（如部分子能量损失）。这些输运观测量对于研究相对论重离子碰撞中产生的 QGP 的唯象学至关重要，通常通过以下两种全息对偶方法确定：

i. 流体力学系数（如一阶剪切和体视黏度输运系数 [46,47,48,125,126,128,159,162,180]，以及与边界量子场论能量-动量张量高阶导数展开相关的系数 [181–183]，还有与守恒荷输运相关的不同电导率和扩散系数 [128,157,159,162,184]），以及介质中光子和双轻子的热产生率 [158,185]，可以通过全息 Kubo 公式利用线性响应理论计算。Kubo 公式将输运系数与边界量子场论中规范不变算符的延迟热关联函数的期望值相关联，这些期望值通过求解体视场二次扰动的线性化运动方程（在体视作用量层面定义）来计算，其中扰动的线性化运动方程在与边界量子场论中确定热态全息关联的平衡背景几何上进行评估，并施加适当的边界条件。

ii. 与动量输运和强耦合量子流体中部分子能量损失相关的观测量通常通过在不同设置下使用 Nambu-Goto 作用量（针对弦）来评估，这些设置可全息关联于探针部分子穿越由背景黑洞解描述的介质 [186–191]（另见 [156,162,192–196]）。

我们首先回顾 EMD 模型对一些流体力学输运系数的相关预测，包括剪切黏度、体视黏度和重子电导率。随后，我们还将简要回顾 EMD 模型在与部分子能量损失相关的输运观测量方面的结果。

在此，我们考虑在接近热平衡状态下，计算与 EMD 模型全息对偶的热且重子密集量子流体的均匀流体力学输运系数。各向同性介质的 $SO(3)$ 旋转对称性将线性化平面波 EMD 场扰动的规范不变和微分同胚不变组合（在运动方程层面，空间动量为零时评估）分类为不同的不可约表示（也称为“通道”）[128]。边界量子场论的体视黏度全息对偶于在 $SO(3)$ 单重态（标量）表示下变换的规范不变和微分同胚不变的体视 EMD 扰动。重子电导率对偶于在三重态（向量）表示下变换的 EMD 扰动，而剪切黏度对偶于在五重态（张量）表示下变换的 EMD 扰动，这些扰动均基于各向同性介质的 $SO(3)$ 旋转对称性群。实际上，由于这些规范不变和微分同胚不变的 EMD 扰动在 $SO(3)$ 的不同不可约表示下变换，它们在线性化层面不发生混合，因此可以为每种体视扰动获得一个独立的解耦运动方程 [128, 140]。

各向同性 EMD 模型中 $SO(3)$ 五重态引力子扰动的张量分量由体视度规场扰动的五个独立组合构成，这些组合对应于边界能量-动量张量中无迹且垂直于流体流动的分量。这些分量满足相同的微分方程，该方程对应于背景几何上无质量标量扰动的运动方程。由于这些扰动的微分同胚不变性，运动方程在标准坐标和数值坐标中形式相同 [128]。研究表明 [128]，剪切黏度满足 $\eta/s = 1/(4\pi)$，对任意 $T > 0$，$\mu_B \geq 0$ 均成立，这与各向同性 EMD 模型属于具有平移和旋转不变性、且体视作用量中

包含度规场二阶导数的广泛全息规范-引力模型类别的预期一致 [46–48]。然而，在有限重子密度下，剪切黏度的自然无量纲比率不再仅仅是 η/s，而是 $\eta T/(\epsilon+P)$ [197,198]。该无量纲比率在 $\mu_B=0$ 时退化为 η/s，而在非零重子密度下表现出随 (T,μ_B) 变化的非平凡行为。参考文献 [162] 详细分析了 EMD 模型相图中 $\eta T/(\epsilon+P)$ 的行为，发现其随 μ_B 增加而减小。在该工作中，$\eta T/(\epsilon+P)$ 表现出拐点和最小值，拐点朝模型的 CEP 演化，并在 CEP 处获得无穷斜率。对于更大的重子化学势和更低的温度，$\eta T/(\epsilon+P)$ 在模型的一阶相变线上出现不连续间隙，如图 2.6(a) 所示。随着 μ_B 增加，$\eta T/(\epsilon+P)$ 的整体值减小，EMD 模型预测在重子密集区域，QGP 更接近完美流体极限。

EMD 模型 $SO(3)$ 三重态扰动的三个向量分量与体视 Maxwell 场扰动的空间分量相关，激发边界量子场论中的重子矢量流。由于介质的空间各向同性，这些向量分量满足单一的解耦运动方程。可以考虑体视空间 Maxwell 扰动 $a\equiv a_i$，$i\in\{x,y,z\}$，以全息方式计算重子电导率，其在各方向上结果相同。向量扰动的运动方程 [128] 为：

$$a''(r,\omega)+\left[2A'(r)+\frac{h'(r)}{h(r)}+\frac{\partial_\phi f(\phi)}{f(\phi)}\phi'(r)\right]a'(r,\omega)+\frac{e^{-2A(r)}}{h(r)}\left[\omega^2 h(r)-f(\phi)\Phi'^2(r)\right]a(r,\omega)=0, \tag{2.26}$$

其中 ω 为 Maxwell 扰动的平面波假设的频率，撇号表示径向导数。必须在背景黑洞视界处对 Maxwell 扰动施加入射波边界条件。在全息理论中，这等价于求解边界重子矢量流算符的延迟热关联函数，并要求 Maxwell 扰动在边界处归一化为单位 [128]。这两个边界条件可通过如下方式系统实现 [162]：

$$a(r,\omega)\equiv\frac{r^{-i\omega}P(r,\omega)}{r_{\max}^{-i\omega}P(r_{\max},\omega)}, \tag{2.27}$$

其中 $r_{\max}$ 为边界的数值参数化（见方程 (2.18) 下方），$P(r,\omega)$ 为在黑洞视界处规则的函数，其运动方程通过将 (2.27) 代入 (2.26) 获得。EMD 模型中重子电导率的全息 Kubo 公式以 MeV 为物理单位 [128,157,159,162] 为：

$$\sigma_B(T,\mu_B)=-\frac{1}{2\kappa_5^2}\phi_A^{1/\nu}\lim_{\omega\to 0}\frac{1}{\omega}\left(e^{2A(r)}h(r)f(\phi)\mathrm{Im}[a^*(r,\omega)a'(r,\omega)]\right)\Big|_{\text{on-shell}}\Lambda[\mathrm{MeV}], \tag{2.28}$$

其中方程 (2.28) 中的括号项为径向守恒通量，可在任意径向坐标处计算。数值过程的细节在 [162] 中讨论。

无量纲比率 σ_B/T 在参考文献 [162] 中被详细分析，显示其通常随温度增加而增大，如图 2.6(b) 所示。在 $T\sim 150--180$ MeV 的温度窗口内，固定 μ_B 的不同曲线大致相交。对于高于此窗口的温度（$T>180$ MeV），σ_B/T 随 μ_B 增加而减小，而在低于窗口的温度（$T<150$ MeV）则表现出相反行为。还注意到，在模型的 CEP 处，重子电导率有限并具有无穷斜率，在更大 μ_B 和更低 T 的一阶相变线上观察到小的不连续间隙。在参考文献 [162] 中，还计算了 EMD 模型相图中的二阶重子敏感度 χ_{B2} 和重子扩散系数 D_B。发现 χ_{B2} 在临界点处发散（所有临界点的普遍特征），而 $D_B=\sigma_B/\chi_{B2}$ 在 CEP 处趋于零，因为 σ_B 在 EMD 模型的临界点处保持有限。

我们注意到，重子电导率反映了系统（特别是其重子流）对重子化学势梯度的响应，因此它与重子数的扩散直接成正比，即重子数梯度在介质中的耗散，比例因子对应于重子敏感度。重子流的耗散效应对相对论重离子碰撞的观测具有重要意义，例如在参考文献 [199] 中，通过 3+1 维流体力学模拟重离子碰撞，发现重子电导率影响了质子和反质子的平均横向动量差以及椭圆流的差异。理解重子数的耗散动态对于低束流能量的相对论重离子碰撞的理论建模尤为重要，因此对 QCD 相图的实验探索具有关键意义。

边界量子场论的能量-动量张量 $T_{\mu\nu}$ 的有迹且垂直于流体流动的分量与介质的体视黏压相关。在非共形边界量子场论中，$T_{\mu\nu}$ 的迹不为零，其迹异常与体视狄拉通场相关。$SO(3)$ 单重态标量 EMD 扰动由引力子的空间迹和狄拉通扰动组成，单重态扰动激发 $T_{\mu\nu}$ 的有迹部分，与体视黏度全息对偶。记单重态扰动为 $\mathcal{H}$，其运动方程 [128] 为：

$$\mathcal{H}'' + \left[4A' + \frac{h'}{h} + \frac{2\phi''}{\phi'} - \frac{2A''}{A'}\right]\mathcal{H}' + \left[\frac{e^{-2A}\omega^2}{h^2} + \frac{h'}{h}\left(\frac{A''}{A'} - \frac{\phi''}{\phi'}\right) + \frac{e^{-2A}}{h\phi'}\left(3A'\partial_\phi f(\phi) - f(\phi)\phi'\right)\Phi'^2\right]\mathcal{H} = 0, \tag{2.29}$$

该方程需在背景黑洞视界处施加入射波边界条件，并在边界处归一化为单位。实际操作中，这通过以下方式实现：

$$\mathcal{H}(r,\omega) \equiv \frac{r^{-i\omega}F(r,\omega)}{r_{\max}^{-i\omega}F(r_{\max},\omega)}, \tag{2.30}$$

其中 $F(r,\omega)$ 为在黑洞视界处规则的函数，其运动方程通过将 (2.30) 代入 (2.29) 得到。EMD 模型中体视黏度的全息 Kubo 公式 [128,159,162] 为：

$$\frac{\zeta}{s}(T,\mu_B) = -\frac{1}{36\pi}\lim_{\omega\to 0}\frac{1}{\omega}\left(\frac{e^{4A(r)}h(r)\phi'^2(r)}{A'^2(r)}\mathrm{Im}[\mathcal{H}^*(r,\omega)\mathcal{H}'(r,\omega)]\right)\Big|_{\text{on-shell}}, \tag{2.31}$$

其中方程 (2.31) 中的括号项为径向守恒通量，可在任意径向坐标处计算。数值计算的细节在 [162] 中讨论。在 $\mu_B = 0$ 时，使用该全息公式的数值结果与参考文献 [125,126] 中基于 $r = \phi$ 规范的不同方法所得结果一致。然而，后一种方法似乎无法扩展到有限 μ_B 的计算。

与剪切黏度在 $\mu_B > 0$ 时的情况类似，体视黏度的自然流体力学表达式不再是 ζ/s，而是无量纲组合 $\zeta T/(\epsilon + P)$，其在 $\mu_B = 0$ 时退化为 ζ/s。参考文献 [162] 对 $\zeta T/(\epsilon + P)$ 进行了详细分析，显示其在 $\mu_B = 0$ 的交叉区域形成峰值。与参考文献 [128,159] 中的早期 EMD 模型不同，该峰值随着 μ_B 增加并未朝模型的临界端点（CEP）移动。在参考文献 [162] 的 EMD 模型中，$\zeta T/(\epsilon + P)$ 的峰值位置随重子密度增加而略微移向更高的温度 T。在参考文献 [128] 的原始 EMD 模型中，$\zeta T/(\epsilon + P)$ 的峰值高度随 μ_B 增加保持近似恒定，而在参考文献 [162] 的第二代改进 EMD 模型（见图 2.6(c)）以及参考文献 [159] 的第一代改进模型中，峰值高度随 μ_B 增加而减小。因此，$\zeta T/(\epsilon + P)$ 峰值的行为在全息 EMD 模型类别中明显依赖于具体模型。

在图 2.6(c) 中，对于不同 μ_B 值，$\zeta T/(\epsilon + P)$ 作为温度 T 的函数开始形成拐点和最小值，这两个特征点随介质重子密度增加而朝 CEP 位置演化（另见图 2.4 下图）。在 CEP 处，$\zeta T/(\epsilon + P)$ 获得无

穷斜率，并在一阶相变线上进一步形成不连续间隙。与剪切黏度类似，体视黏度的值随 μ_B 增加而受到抑制。黏性效应的整体抑制可能是结合格点 QCD 输入的全息 EMD 模型的稳健特性，因为在参考文献 [128,159] 的早期 EMD 模型中也观察到类似的定性行为。

在图 2.6(d) 中，我们展示了 $\mu_B = 0$ 时 EMD 模型对 $\zeta/s(T)$ 的预测与近期贝叶斯分析 [32,33] 中提取的 $\zeta/s(T)$ 值的比较，这些分析同时描述了多项重离子实验数据。全息 EMD 模型预测的 $\zeta/s(T)$ 值与最先进的唯象模型偏好的值范围相符。考虑到任意全息模型的 η/s 与实验数据提取的 η/s 在量级上相符，且 EMD 模型预测的态方程在有限 (T,μ_B) 下与 QCD 态方程及敏感度（见图 2.3 和 2.4）存在定量一致性，这为自下而上全息 EMD 方法作为重离子碰撞中强耦合 QGP 的有效建模提供了合理证据。这一论点将在第 3.1 节中进一步加强，届时我们将讨论在有限温度和磁场下磁化 EMD 模型对热磁化 QGP 物理的适用性。

EMD 模型在 CEP 处重子电导率、剪切黏度和体视黏度保持有限，表明其与模型 B 动态普适类 [200] 兼容。这似乎是大 N_c 规范理论（如同任何全息规范-引力模型）的共同特征 [201]，与 $N_c = 3$ 的 QCD 普遍预期不同，在 QCD 中，这三个观测量在 CEP 处预计会发散 [202–204]，符合模型 H 动态普适类 [200]。

我们有必要简要讨论在 EMD 模型的 $SO(3)$ 五重态、三重态和单重态通道中计算得到的均匀准正规模（QNMs）谱的结果 [163]。事实上，渐进 AdS 黑洞的准正规模 [139–141,205,206] 包含了关于全息对偶量子场论（QFT）在偏离热平衡的线性扰动下的大量物理信息。

体视扰动场的近边界展开通常包括每个场扰动的领先阶非可归一化模和次领先阶可归一化模。领先模激发对偶边界量子场论中相应的局部和规范不变算符，而次领先模则与这些算符的期望值相关。如果在边界处将次领先模设为零，并在黑洞视界处施加入射波边界条件，则体视扰动的线性化运动方程的解可用于计算壳上作用量，从而得到对偶量子场论的延迟热关联函数，这些关联函数通过 Kubo 公式与强耦合量子流体的输运系数相关。对于从格林函数虚部提取的输运系数，这一过程在物理上等价于之前讨论的使用径向守恒通量计算输运系数的方法。

另一方面，由于对偶量子场论的延迟热关联函数由体视扰动的次领先模与领先模的负比率给出 [207]，通过在边界处将领先模设为零并在黑洞视界处施加因果入射波条件，可得到这些格林函数的极点。由于在渐进 AdS 时空中定义的准正规模的频率本征值问题恰好由边界处领先模消失的 Dirichlet 边界条件定义 [140]，可以看出，描述渐进 AdS 黑洞线性扰动指数衰减的准正规模在全息意义上对应于对偶量子场论中延迟热格林函数的极点。这些极点反过来描述了强耦合量子流体中集体激发的流体力学和非流体力学色散关系，基于此可以分别计算一些流体力学输运系数 [181,208]（作为之前讨论的直接全息 Kubo 公式的替代方法），以及对偶量子场论在偏离平衡的线性扰动下特征平衡时间的上限。

事实上，如参考文献 [139] 所述，具有最小虚部绝对值的非流体力学准正规模，对应于系统中寿命最长的非流体力学激发，为介质接近热平衡的不同平衡时间提供了上限。根据参考文献 [163] 中 EMD

模型的 $SO(3)$ 五重态、三重态和单重态通道中的最低均匀非流体力学准正规模，结果显示，在高温下这些不同通道的平衡时间非常接近，而在临界端点（CEP）处则表现出显著的分离。这一结果表明，与体视度规场对偶的能量-动量张量、与体视 Maxwell 场对偶的重子流以及与体视狄拉通场对偶的标量凝聚态，在 EMD 模型的临界区域以显著不同的速率达到平衡，其中重子流接近热平衡的时间最长，而能量-动量张量通常比其他观测量更快达到平衡，即使在远离临界区域的相图区域也是如此。此外，在大多数情况下，介质的特征平衡时间随重子化学势 μ_B 的增加而减小，而随温度 T 的降低而显著增加。

在强耦合量子流体中，与部分子能量损失相关的输运系数也进行了多种全息计算，例如由于重夸克拖曳力导致的重夸克能量损失 [186,187]、重夸克的朗之万动量扩散系数 [188,189] 以及与光部分子以光速运动时能量损失相关的喷注猝灭参数 [190,191]。这些能量损失输运系数的计算通过在背景体视场解上定义的经典弦的探针 Nambu–Goto（NG）作用量进行。NG 作用量依赖于 $\sqrt{\lambda_t}$，其中' t Hooft 耦合常数通常在全息计算中被视为一个额外的自由参数。原则上，该参数可通过将 NG 作用量计算的全息观测量与不同类型的唯象数据进行比较来确定（参见参考文献 [156,209]）。对于有限温度和重子密度的各向同性 EMD 模型，这些部分子能量损失观测量的全息公式已在参考文献 [156] 中推导。改进 EMD 模型 [162] 的相应结果在其相图上进行了数值计算，包括临界端点（CEP）和一阶相变线区域。研究发现，随着介质重子密度向相图临界区域增加，重夸克拖曳力和能量损失、朗之万动量扩散以及喷注猝灭参数均显著增强。事实上，速度较快的部分子对介质的温度和重子化学势更加敏感。这些结果表明，在流体的重子密集区域，喷注抑制和部分子能量损失更为显著。所有这些观测量在 CEP 处表现出无穷斜率，并在一阶相变线上显示出较大的不连续间隙。在图 2.4 的下图中，展示了这些观测量的一些交叉特征曲线（由拐点或极值序列组成），这些曲线收敛到对应于 CEP 的单一位置，并与其他模型观量量的特征曲线一同显示，详见参考文献 [162]。

2.1.3 全息贝叶斯分析

上述讨论的 EMD 模型结果依赖于全息势函数 $V(\phi)$ 和 $f(\phi)$ 的选择，即需要提供合适的函数形式及其相应参数。正如前文所述，文献中存在多种相互竞争的参数化形式，但迄今为止尚未对这些形式进行系统比较。对于 EMD 模型的任何特定参数化，一个紧迫的问题是其预测在多大程度上受到用于拟合参数的格点 QCD 结果的约束，以及这些预测对格点 QCD 结果不确定性的鲁棒性如何。这一问题只能通过量化 $V(\phi)$ 和 $f(\phi)$ 的不确定性并系统比较不同参数化来解决。

在贝叶斯统计推断框架 [210,211] 中，可以找到用于系统分析 QCD 状态方程建模中参数敏感性和不确定性量化的工具。近年来，贝叶斯统计已成为高能物理领域（包括中子星 [212–215] 和重离子物理 [32,33,44,216–218]）系统评估模型和假设的先进工具。贝叶斯推断的核心在于贝叶斯定理：$P(M(\theta)|D) = \frac{P(D|M(\theta))\cdot P(M(\theta))}{P(D)}$，其中 D 表示数据，$M(\theta)$ 表示具有参数 θ 的模型。贝叶斯定理通过联合概率 $P(D\cap M(\theta))$ 的条件概率形式 $P(M(\theta)|D)$ 和 $P(D|M(\theta))$ 表达。条件分布 $P(M(\theta)|D)$ 称为后验分布，可用于区分不同参数集 θ。它由似然函数 $P(D|M(\theta))$（量化模型与数据的吻合程度）和先验分布

$P(M(\theta))$（根据已有知识为不同参数集分配权重）的乘积构成。公式右边的分母 $P(D)$ 称为证据，可作为归一化常数获得。

近期，MUSES 协作组开发了一种改进的 EMD 模型数值实现，支持对零密度 QCD 状态方程的格点结果进行贝叶斯分析 [219]。在公式 (2.24) 和 (2.25) 中，势函数对 ϕ 的高度非线性特性使得函数形式（如图 2.5 所示）对参数值的精确性高度敏感。参考文献 [219] 提供了完整的贝叶斯分析，而本文简要概述并解释初步分析结果。

为重现公式 (2.24) 和 (2.25) 的定性特征，提出了全息 EMD 作用量 (2.3) 中自由函数 $V(\phi)$ 和 $f(\phi)$ 的新参数化形式，使其对参数值的依赖更加透明：$V(\phi) = -12\cosh\left[\left(\gamma_1 \Delta\phi_V^2 + \gamma_2\phi^2\Delta\phi_V^2 + \phi^2\right)\phi\right]$, $f(\phi) = 1 - (1 - A_1)\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh\left(\frac{\phi-\phi_1}{\delta\phi_1}\right)\right] - A_1\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh\left(\frac{\phi-\phi_2}{\delta\phi_2}\right)\right]$. 公式 (2.33) 通过 γ_1 和 γ_2 在 $\phi \ll \Delta\phi_V$ 和 $\phi \gg \Delta\phi_V$ 之间插值两个不同的指数斜率。公式 (2.34) 则在 $\phi_1 - \phi \ll \delta\phi_1$ 时使 $f(\phi) \approx 1$，在 $\phi_1 - \phi_2$ 范围内形成高度为 $f(\phi) \approx A$ 的平台，最终在 $\phi - \phi_2 \gg \delta\phi_2$ 时趋向 $f(\phi) \approx 0$。

参数的先验分布在表 2.1 左侧指定的范围内取均匀分布。对于表 2.1 中标记为“(J)”的单个参数，采用对其对数的均匀分布（即 Jeffreys 先验）。然后，从该先验分布中抽取随机样本，输入到马尔可夫链蒙特卡洛（MCMC）算法 [220,221] 中。该算法通过对参数进行随机更改，使经过足够多次迭代后达到的平衡概率分布与公式 (2.32) 给出的后验分布一致。通过重复该算法，可从后验分布中生成大量参数集样本。参数基于 $\mu_B = 0$ 时的格点 QCD 重子敏感度和熵密度进行拟合 [14,82]。模型与格点结果的吻合程度通过高斯形式的似然函数 $P(D|M(\theta))$ 量化，协方差矩阵根据格点 QCD 误差条选择，同时考虑相邻点之间的自相关。额外引入一个参数来衡量这些相关性，并在贝叶斯推断中进行估计 [210]。

通过这种方式获得的格点 QCD 结果的 95% 置信区间如表 2.1 右侧所示。最终，后验分布的参数集可用于计算预测。预测的统计分布可用于量化格点 QCD 误差条引起的不确定性以及对不同模型参数的敏感性。作为与格点 QCD 结果兼容性的检查，图 2.7 将不同 μ_B/T 值的预测（显示为半透明细线）与参考文献 [82] 的有限密度格点 QCD 状态方程（显示为同色宽带）进行比较。虽然乍看不明显，图 2.7 中每个带上叠加了数千条线。值得注意的是，零密度状态方程对模型参数的约束非常严格，以至于这些线聚集成看似极细的带。通过这种方式利用格点 QCD 输入约束模型，可以提取更高密度的预测，甚至包括 QCD 相变区域。由于生成了大量模型实现，这种 EMD 模型的贝叶斯分析还能研究每个模型参数在预测和拟合格点结果中的作用。或许更重要的是，这种分析提供了为预测和假设分配概率的可能性。原则上，贝叶斯模型选择还可用于区分不同模型。总体而言，自下而上的全息模型与贝叶斯工具的结合为将低密度高温 QCD 状态方程的知识外推到高密度提供了一种部分系统化的有前景工具。由于 EMD 模型能够捕捉交叉区域强耦合 QGP 的物理特性，它是这一任务的特别合适候选者。

2.1.4 其他全息模型

尽管本文综述的重点是自下而上全息 EMD 模型在高温高重子密度 QCD 相图中的结果，本节将简要介绍其他类型全息构造的一些研究成果。在广泛的自下而上爱因斯坦–狄拉通构造类别中，未考虑狄拉通势函数形式中包含的味道动力学效应（这些效应最初在参考文献 [124,125,127,128] 中通过匹配格点 QCD 结果提出），存在一类被称为“改进全息 QCD”（ihQCD）的模型，最初由参考文献 [222,223] 提出，并在 [138] 中进一步综述。由于 ihQCD 模型未考虑味道动力学，这类自下而上全息构造实际上是纯杨–米尔斯（YM）系统的有效模型，而非 QCD。在 $T = 0$ 的纯 YM 系统中，对于大色荷分离，存在无穷重探针夸克的线性禁闭势以及胶球激发物理谱中的质量间隙，这两者均被 ihQCD 模型很好地描述。与实际具有 2+1 动态夸克味道的 QCD 中观察到的去禁闭交叉相变不同，纯 YM 理论具有从胶球禁闭气体到去禁闭相（对应于纯胶子等离子体）之间的一阶相变。在有限温度下，ihQCD 模型能够实现这一一阶相变，与纯 YM 理论一致。然而，在这些 ihQCD 模型中，$\eta/s = 1/(4\pi)$ 表明该理论在所有能量尺度上均为强耦合，因此无法捕捉紫外区域渐进自由的相关关键性质。如参考文献 [129] 明确所示，对 ihQCD 模型的高阶曲率修正可为 $[\eta/s](T)$ 提供非平凡的温度依赖性，使该观测量呈现出与纯 YM 及 QCD 物质预期的相似轮廓，即在紫外区域由于渐进自由，$[\eta/s](T)$ 随介质温度显著增加。仅包含体视度规场二阶导数的简单爱因斯坦引力–规范模型缺乏渐进自由，而考虑体视作用量的高阶曲率修正则与降低边界对偶量子场论有效’t Hooft 耦合常数的值相关。

对纯 YM 系统的原始 ihQCD 构造进行了扩展，考虑了夸克味道数 N_f 非常大的情况，其中比率 $x \equiv N_f/N_c$ 在全息框架中保持有限，这类模型在文献中被称为 V-QCD 模型 [224–227]。字母“V”代表大 N_c、N_f 且固定 $x = N_f/N_c$ 的委内瑞拉极限（Veneziano limit）。在这类自下而上模型中，通过考虑速子味 D-膜对胶子背景的完全反拔，纳入了味道动力学。V-QCD 模型已被用于计算大量物理观测量，包括谱学 [228,229]、热力学量 [224] 和输运系数 [230]，并在一些远离平衡的计算中得到应用，例如参考文献 [231]。这些 V-QCD 模型主要用于研究涉及中子星和高密度 QCD 物质的物理，详见近期综述 [112]。

本文综述的 EMD 模型类别可视为 V-QCD 模型更广义类别在速子场为零时的泰勒展开形式（参见参考文献 [112] 的第 3.2 节讨论）。然而，必须强调，全息构造的具体细节可能导致显著不同的结果。通过比较参考文献 [160–163] 中 EMD 模型的拟合结果与图 2.2 及图 2.1 下图中的格点 QCD（LQCD）结果，可以看出，EMD 模型在描述 QCD 热力学第一性原理格点结果方面优于图 2.8 中考虑的多种 V-QCD 模型。特别是，对于能量-动量张量的迹异常，图 2.8(a) 显示，不同 V-QCD 构造在伪临界温度以下甚至无法定性地正确描述该观测量的 LQCD 行为。实际上，在具有 2+1 味道的 QCD 中，$\mu_B = 0$ 时，强子气体与夸克-胶子等离子体（QGP）之间不存在相变，而仅为解析交叉 [13,15]；然而，在全息 V-QCD 方法中，存在一阶相变 [224]，这与其中嵌入的 ihQCD 背景有关。因此，考虑到第 2.1 节中所述的局限性和不足，可以合理地说，本文讨论的 EMD 全息模型类别仍然是提供具有 2+1 动态夸克味道和物理夸克质量的实际 QCD 热力学定量描述的领先方法，无论

是在零重子密度还是有限重子密度下。

另一类广泛研究的自上而下全息模型主要与 QCD 的谱学性质相关，即所谓的 Witten–Sakai–Sugimoto 模型 [87,232,233]，参见 [234] 的综述。这类全息模型尚未被证明能够准确定量描述具有动态夸克味道的高温 QCD 热力学的第一性原理格点结果。然而，在参考文献 [235] 中，Witten–Sakai–Sugimoto 方法被用于提供零温度下冷而密实的核物质的唯象真实描述，与中子星物理的某些已知理论和观测约束吻合良好。关于致密星的全息建模的广泛讨论，参见近期综述 [112]。

3 高温和磁化夸克-胶子等离子体的全息模型

QCD 相图不仅是温度 T 和重子化学势 μ_B 的函数，还依赖于奇异夸克化学势 μ_S、电荷化学势 μ_Q、电磁场以及特定物理环境中相关的味道数等。通过改变重离子碰撞的中心度，可以在温度与磁场平面 (T, eB) 上研究 QCD 相图。在高能非中心重离子碰撞中产生了人类迄今创造的最强磁场，例如在 RHIC 的 Au+Au 碰撞（质心能量 $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV，碰撞参数 $b \sim 12$ fm）中，最大磁场强度 $eB_{\max} \sim 5m_\pi^2 \sim 0.09$ GeV^2；在 LHC 的 Pb+Pb 碰撞（质心能量 $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV，碰撞参数 $b \sim 13$ fm）中，$eB_{\max} \sim 70m_\pi^2 \sim 1.3$ GeV^2（参见参考文献 [236] 的图 2，以及 [237–241]）。研究强磁场下的 QCD 物质不仅与磁星物理 [242] 相关，还与早期宇宙 [243,244] 有关，因此近年来成为一个非常活跃的研究领域，参见 [245–253]。

尽管在非中心重离子碰撞的早期阶段产生了极强的磁场，且在这些初始阶段具有重要影响，但由于旁观者强子迅速离开碰撞区域，通常预期在夸克-胶子等离子体（QGP）形成时，磁场强度已显著衰减 [254]。早期研究认为，介质中感应的电导率 [255,256] 和磁场源的量子性质 [257] 可能显著延缓磁场的衰减。近期研究 [258] 提出，介质对衰减外部磁场的电磁响应不完全，导致感应的电流低于欧姆定律预期，从而使介质中感应的磁场强度被强烈抑制（比基于欧姆定律假设的文献估计低两个数量级）。这一观点有助于解释近期 STAR 同位旋实验 [259] 的结果，该实验最初认为强磁场会导致手性磁效应。

尽管如此，从理论视角研究 QCD 相图在 (T, eB) 平面中的结构仍具有重要意义。在低温下，随着磁场增强，手性凝聚物的强度增加，称为磁催化现象 [260]。然而，在略高于 QCD 交叉区域的高温下，观察到相反效应：手性凝聚物强度减小，伪临界交叉温度随磁场增加而降低，称为逆磁催化（或磁抑制），这在参考文献 [239,261–264] 的格点 QCD 第一性原理模拟中得到验证，参见 [265]。还有预测 [266] 表明，在极高磁场强度 $eB \sim 4 - 10$ GeV^2[267,268] 下，QCD 相图的 (T, eB) 平面上存在一阶相变线，终止于一个临界点，尽管当前针对具有 2+1 味道和物理夸克质量的 QCD 状态方程的格点模拟 [264] 仅在 110 MeV $< T <$ 300 MeV 且 $eB \lesssim 0.7$ GeV^2 范围内发现了解析去禁闭交叉。

文献中提出了多种全息模型，用于研究强耦合量子系统在外部磁场影响下的不同方面。这些研究有的从定性角度探讨全息方法计算的物理观测量，参见 [269–290]；有的则从定量角度直接与格点

QCD 第一性原理计算结果进行比较，参见 [209,291–293]。

3.1 磁场爱因斯坦-麦克斯韦-狄拉通模型

首个在有限温度和恒定外部磁场（且 $\mu_B = 0$）下的唯象磁场全息 EMD 模型见参考文献 [291]。该模型将前节讨论的各向同性方法推广到各向异性的 EMD 背景，其中 $SO(3)$ 旋转对称性在垂直于磁场的横向平面中被打破为 $SO(2)$。在这种情况下，体视作用量的一般形式与方程 (2.3) 相同，但麦克斯韦–狄拉通耦合函数 $f(\phi)$ 必须与有限温度和重子化学势的情况不同。在有限 (T, μ_B) 的 EMD 模型中，$f(\phi)$ 有效表示与守恒重子流相关的耦合，该耦合在全息框架中通过匹配有限温度和零化学势下计算的格点 QCD 重子磁化率动态确定，如第 2.1.1 节所述。在有限 (T, eB) 的磁场 EMD 模型中，该耦合必须与边界对偶量子场论的电荷部门而非重子部门相关。因此，取代重子磁化率，输入全息模型的唯象参数是有限温度和零磁场下计算的格点 QCD 磁化率，用于“教导”渐进 AdS 黑洞背景表现出高温磁化 QGP 的行为。

在下一节中，我们将回顾这一工作的主要方面，但在此之前，类似第 2.1.1 节对有限 (T, μ_B) 的 EMD 模型多年改进的讨论，我们在下文简要评论有限 (T, eB) 的磁场 EMD 模型构造的改进。参考文献 [291] 中提出的原始有限 (T, eB) 构造与参考文献 [156–159] 中的第一代改进 EMD 模型具有相同的自由参数集 $\{G_5, \Lambda, V(\phi)\}$，意味着当重子化学势和磁场关闭时，两种模型描述相同的有限温度系统。另一方面，如前所述，磁场 EMD 模型的麦克斯韦–狄拉通耦合 $f(\phi)$ 与重子密集模型不同。在参考文献 [292] 中，构建了磁场 EMD 模型的改进版本（该改进版本也用于参考文献 [209,293]），通过对有限温度和零磁场的 QCD 状态方程及磁化率的更近期格点结果进行更优匹配，更新了自由参数和函数集 $\{G_5, \Lambda, V(\phi), f(\phi)\}$。参考文献 [292] 中为改进磁场 EMD 模型获得的自由参数集 $\{G_5, \Lambda, V(\phi)\}$ 随后也用于参考文献 [160–163] 中描述重子密集介质的第二代改进 EMD 模型。在下文中，我们主要回顾参考文献 [209,292,293] 中有限 (T, eB) 的改进磁场 EMD 模型计算的物理观测量结果。

3.1.1 各向异性全息热力学

由体视作用量 (2.3) 导出的通用 EMD 运动方程见方程 (2.5) 至 (2.7)。恒定外部磁场的存在（我们任意取其沿 z 轴方向）将对偶量子场论的 $SO(3)$ 旋转对称性打破为沿磁场方向的 $SO(2)$ 旋转对称性。这种对称性破缺意味着当磁场开启时，体视度规场的假设必须是各向异性的。因此，为了描述处于热力学平衡的高温和磁化流体，我们采用以下各向异性和平移不变的带电黑洞假设来描述体视 EMD 场 [291,292]：

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = e^{2a(r)} \left[-h(r) dt^2 + dz^2 \right] + e^{2c(r)} (dx^2 + dy^2) + \frac{dr^2}{h(r)}, \phi = \phi(r), \quad A = A_\mu dx^\mu = \mathcal{B} x dy \Rightarrow F = dA = \mathcal{B} dx \wedge dy,$$

其中 $\mathcal{B}$ 是以数值坐标表示的恒定磁场。将假设 (3.1) 代入通用 EMD 场方程 (2.5) 至 (2.7)，可得到以下耦合常微分方程组 [291,292]：

$\phi''+\left(2a'+2c'+\frac{h'}{h}\right)\phi'-\frac{1}{h}\left(\frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi}+\frac{\mathcal{B}^2e^{-4c}}{2}\frac{\partial f(\phi)}{\partial\phi}\right)=0,\ a''+\left(\frac{14}{3}c'+\frac{4}{3}\frac{h'}{h}\right)a'+\frac{8}{3}a'^2+\frac{2}{3}c'^2+\frac{2}{3}\frac{h'}{h}c'+\frac{2}{3h}V(\phi)-\frac{1}{6}\phi'^2=0,\ c''-\left(\frac{10}{3}a'+\frac{1}{3}\frac{h'}{h}\right)c'+\frac{2}{3}c'^2-\frac{4}{3}a'^2-\frac{2}{3}\frac{h'}{h}a'-\frac{1}{3h}V(\phi)+\frac{1}{3}\phi'^2=0,\ h''+(2a'+2c')h'=0,\ a'^2+c'^2-\frac{1}{4}\phi'^2+\left(\frac{a'}{2}+c'\right)\frac{h'}{h}+4a'c'+\frac{1}{2h}\left(V(\phi)+\frac{\mathcal{B}^2e^{-4c}}{2}f(\phi)\right)=0,$

其中方程 (3.6) 为约束方程。关于如何为给定初始条件对 $(\phi_0,\mathcal{B})$ 数值求解上述运动方程的步骤，在参考文献 [292,293] 中有详细讨论（相对于 [291] 中设计的原始方法，算法和数值技术有所改进）。与第 2.1.1 节讨论的有限温度和重子密度的 EMD 模型类似，通过数值解在边界附近计算的有限温度和磁场的背景各向异性 EMD 场，可提取以下用于全息计算若干热力学观测量的紫外展开系数：$\{h_{\mathrm{far}0},a_{\mathrm{far}0},c_{\mathrm{far}0},\phi_A\}$。基于这些紫外系数，可写出以下全息公式，用于计算温度 T、边界处电荷 e 与恒定外部磁场 B 的乘积 eB（以标准坐标表示），以及熵密度 s（分别以 MeV、MeV^2 和 MeV^3 为单位）[291–293]：

$T=\frac{1}{4\pi\phi_A^{1/\nu}}\sqrt{h_{\mathrm{far}0}}\Lambda,\quad eB=\frac{e}{2}\left(a_{\mathrm{far}0}-c_{\mathrm{far}0}\right)\frac{\mathcal{B}}{\phi_A^{2/\nu}\Lambda^2},\quad s=\frac{2\pi e^2(a_{\mathrm{far}0}-c_{\mathrm{far}0})}{\kappa_5^2\phi_A^{3/\nu}\Lambda^3},$

其中能量尺度 Λ、五维牛顿常数以及狄拉通势与方程 (2.24) 中给出的相同。为了确定有限温度和磁场的磁场 EMD 模型的麦克斯韦–狄拉通耦合函数 $f(\phi)$，需要通过动态匹配有限温度和零磁场下的全息磁化率与相应的格点 QCD 结果。如参考文献 [291] 所述，有限温度和零磁场下正则化全息磁化率的 EMD 公式在数值坐标中可表达为：

$\chi(T,B=0)=\chi_{\mathrm{bare}}(T,B=0)-\chi_{\mathrm{bare}}(T_{\mathrm{low}},B=0)=-\frac{1}{2\kappa_5^2}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{h_{\mathrm{far}0}}}\int_{r_{\mathrm{start}}}^{r_{\mathrm{var\ max}}}dr\,f(\phi(r))\right)\Big|_{T,B=0}-(\mathrm{same})\Big|_{T_{\mathrm{low}},B=0}\right]_{\mathrm{on\text{-}shell}},$

其中 $r_{\mathrm{var\ max}}\equiv\sqrt{h_{\mathrm{far}0}}\left[\tilde{r}_{\mathrm{fixed\ max}}-a_{\mathrm{far}0}+\ln\left(\phi_A^{1/\nu}\right)\right]$，$\tilde{r}_{\mathrm{fixed\ max}}$ 为标准坐标中的固定紫外截止，必须选择使得方程 (3.8) 中的积分上限满足 $r_{\mathrm{conformal}}\le r_{\mathrm{var\ max}}\le r_{\mathrm{max}}$，适用于所有考虑的背景几何。我们注意到，$r_{\mathrm{conformal}}$ 是径向坐标的一个值，在此值处背景几何已达到（在一定数值容差内）共形 AdS_5 紫外固定点，$r_{\mathrm{max}}\ge r_{\mathrm{conformal}}$ 是我们进行体视运动方程数值积分的最大径向坐标值。利用参考文献 [294] 中具有 2+1 味道和物理夸克质量的有限温度和零磁场下的格点 QCD 磁化率作为唯象输入，可确定麦克斯韦–狄拉通耦合函数的形式如下 [292]：

$f(\phi)=0.95\,\mathrm{sech}(0.22\phi^2-0.15\phi-0.32),$

结果如图 3.1(a) 所示。

在图 3.1 中，我们展示了有限温度和磁场 (T,eB) 下磁场 EMD 模型 [292] 的预测结果，并与参考文献 [264] 的格点 QCD 结果进行了比较，内容包括：(b) 压力差 $\Delta p(T,eB)\equiv p(T,eB)-p(T=125\,\mathrm{MeV},eB)$；(c) 归一化熵密度 s/T^3（同时展示了参考文献 [14] 在 $B=0$ 时的格点 QCD 结果）；(d) 通过 s/T^3 拐点提取的随磁场变化的交叉温度。对于所考虑的磁场值，高温和磁化 QCD 物质在强子和部分子状

态之间不存在真正的相变，仅为解析交叉。与参考文献 [160–162] 中有限 (T, μ_B) 的 EMD 模型（其相图已被深入研究）相比，参考文献 [209,292,293] 中有限 (T, eB) 的磁场 EMD 模型的相图仍未被充分探索。然而，一个挑战在于，磁场 EMD 模型通常需要比重子密集模型更多的背景黑洞解，以实现物理观测量作为 T 和 eB 函数的平滑插值。

与之前讨论的重子密集 EMD 模型类似，这里需作一些说明。目前，磁场 EMD 模型的全息重整化程序尚未在文献中实现，因此模型可计算的物理量受到限制。如同重子密集 EMD 模型的情况，压力（及能量密度）无法直接从重整化的边界在壳作用量中提取，因为该量尚未可用。然而，类似于方程 (2.20) 中对重子密集 EMD 模型的处理，可通过对固定磁场的方程 (3.7) 中熵密度的温度积分来计算压力。如参考文献 [264] 第 2 节详细讨论，这种方法给出所谓“B 方案”中的各向同性压力，其中磁场在压缩过程中保持固定，压力是系统对此压缩的响应函数。相应地，这也给出了“Φ 方案”中沿磁场方向的各向异性纵向压力，其中压缩过程中保持固定的是磁通量。在 Φ 方案中，垂直于磁场方向的横向压力依赖于介质的磁化强度，这需要通过规范-引力对偶性对体视作用量进行全息重整化来计算，而这一计算在参考文献 [291,292] 中尚未完成。此外，由于缺乏重整化的在壳作用量，磁场 EMD 模型目前也无法计算有限磁场下的能量密度。一旦磁场 EMD 模型实现全息重整化，验证其是否满足参考文献 [296] 中发现的 QCD 和磁化 SYM 等离子体的横向与纵向各向异性压力比的普适渐进标度将是一个有趣课题。

在参考文献 [209] 中，有限 (T, eB) 的磁场 EMD 模型进一步用于计算重整化 Polyakov 环算符的期望值大小 [297–300]，即 $P_r(T, eB) = |\langle \hat{L}_P \rangle_r| = e^{-F_r^Q(T,eB)/T}$，其中 $F_r^Q(T, eB)$ 为边界处单一静止重夸克的重整化自由能。在全息理论中，该量依赖于来自 NG 作用量的’t Hooft 耦合常数，在自底向上框架中被视为额外的自由参数。由于 $\sqrt{\lambda_t} = L^2/\alpha' = (L/l_s)^2$，其中 l_s 为基本弦长度，L 为渐进 AdS 半径（此处设为单位 1），在全息对偶的经典规范-引力区域，’t Hooft 耦合应为大值，因为在此极限下 $l_s \ll L$。通过将全息 Polyakov 环 $P_r(T, eB)$ 的总体大小与参考文献 [263,267] 的格点 QCD 结果匹配，如图 3.1(e) 所示，参考文献 [209] 确定了较大的值 $\sqrt{\lambda_t} = 1450$，这表明自顶向下理论预期与自底向上唯象结果在全息方法中具有非平凡的一致性。此外，磁场 EMD 模型在描述 QCD 物质解禁闭区域（对应于强耦合高温磁化 QGP）的 Polyakov 环方面提供了合理的结果，适用于磁场强度 $eB \lesssim 1\,\mathrm{GeV}^2$ 且 $T \gtrsim 150\,\mathrm{MeV}$ 的情况。

在参考文献 [209] 中，还计算了全息 EMD 模型对重夸克熵 $S_Q(T, eB) = -\partial F_r^Q(T, eB)/\partial T$ 的预测。重夸克熵在任意两个不同值之间的比率 $S_Q(T, eB)/S_Q(T_0, eB_0)$ 尤为引人注目，因为该比率不依赖于全息 Polyakov 环计算中引入的额外自由参数 $\sqrt{\lambda_t}$。因此，一旦获得背景黑洞解，此类计算无需固定额外的自由参数。在图 3.1(f) 中，展示了 EMD 模型对比率 $S_Q(T, eB)/S_Q(T = 200\,\mathrm{MeV}, eB = 0)$ 的预测，其中零磁场结果与参考文献 [295] 中相应的格点 QCD 结果进行了比较。有趣的是，在 $B = 0$ 时，EMD 模型的预测在解禁闭区域（$T \gtrsim 150\,\mathrm{MeV}$）与格点 QCD 结果达到完美的定量一致，但在禁闭强子区域完全无法重现重夸克熵的正确行为。

在强子区域的交叉温度以下，Polyakov 环和重夸克熵的预测与格点结果不符，而在交叉温度以上

的部分子区域则表现出定量一致，这是因为全息 EMD 模型适用于描述高温 QCD 物质的解禁闭 QGP 相，而不适合描述禁闭强子相。值得一提的是，Polyakov 环和重夸克熵的全息结果与可用格点 QCD 数据的比较也证实了 EMD 作用量中标量场为狄拉通场的性质。这是因为在参考文献 [209] 中还探讨了 EMD 作用量中的标量场 ϕ 非狄拉通场的可能性，在这种情况下，弦框架和爱因斯坦框架中的体视度规将相同。然而，采用这种方法时，全息 EMD 模型对 Polyakov 环和重夸克熵的预测甚至在定性层面上与格点 QCD 数据不符。如参考文献 [209] 所述，由于全息 EMD 热力学已通过 $B = 0$ 时的 QCD 状态方程和磁化率与格点数据匹配，唯一能使 Polyakov 环和重夸克熵结果与格点 QCD 数据兼容的方式是将 EMD 作用量中的标量场解释为狄拉通场。因此，这种分析明确确立了唯象 EMD 模型全息对应中体视标量场 ϕ 的物理意义。

在图 3.1 中展示了有限温度 (T, eB) 下的磁性 EMD 模型的结果，以及图 2.3、图 2.4 和图 2.6d 中展示的有限温度 $(T, \mu B)$ 下的 EMD 模型结果，并与一些热力学观测量和由贝叶斯分析从重离子碰撞数据获得的传输系数后验分布的第一性原理 LQCD 结果进行了比较，这些结果构成了支持 EMD 全息模型在描述重离子碰撞中热 QGP 的多个方面的实际现象适用性的主要论据。以下几点原因使得这些结果特别值得关注：

- 这里回顾的这一类相对简单的自下而上的全息 EMD 构造可以用来做出关于 QGP 的物理合理预测，不仅提供定性洞察，还能给出一些量化的、可靠的结果，这些结果可能超出了当前 QCD 第一性原理方法的适用范围。
- 作为一类自下而上的全息构造，回顾的这些现象学 EMD 模型进一步证明了即便我们并不完全知道边界的高维时空中的全息对偶量子场理论的具体形式，全息字典在实践中仍然是有用的。
- 尽管我们并不确切知道全息对偶的具体形式，然而这些结果表明，这个全息对偶必然是某种有效的四维强耦合量子场理论，并且在许多方面非常接近 QCD。虽然 EMD 全息与 QCD 在某些方面（例如缺乏渐近自由性和在约束哈德龙态的热力学行为上）有所不同，但它仍然能够捕捉到 QCD 的若干关键特征。

3.1.2 各向异性全息传输系数

外部磁场（或更一般地，任何各向异性来源）在介质中会将输运系数分解成几个各向异性的分量，而这与各向同性介质的情况相比更为复杂。关于各向异性重夸克拖曳力和朗之万动量扩散系数的全息分析，以及涉及轻夸克的各向异性喷注淬火参数，已在文献 [274, 292, 293, 305 − 310] 中进行了讨论。此外，关于各向异性剪切和体积粘性的分析见于文献 [155, 272, 292, 311 − 313]。目前，这些输运系数的系统性检查尚未完成，因为相对论磁流体力学领域仍在 intensively 开发中 [314 − 332]。

本节的目的是简要回顾文献 [292, 293] 中关于强耦合热磁化 QGP 在有限（T, eB）下的部分输运系

数的磁场 EMHD 预测的主要结果。各向异性重夸克拖曳力和朗之万动量扩散系数的全息公式可以在文献 [292] 的附录 A 中找到，并在同一参考文献的 III.B 和 III.C 节中应用于有限（T, eB）的磁场 EMD 模型。总体结论是：在强耦合的各向异性等离子体中，重夸克的能量损失和动量扩散在外部磁场存在的情况下会被增强，并且在横向方向上大于在磁场方向上的效应。文献 [293] 中发现，轻夸克的各向异性喷注淬火参数也随着外部磁场的增加表现出总体增强，且横向动量扩展在横向方向上的效应大于在磁场方向上的效应。因此，通常预测在外部磁场作用下，重夸克和轻夸克在强耦合量子介质中会有更多的能量损失。

在文献 [272] 中推导了沿磁场方向的各向异性剪切粘性 $\eta_{\parallel}$ 和垂直磁场方向的剪切粘性 $\eta_{\perp}$，并在文献 [292] 的附录 A 中进行了回顾。各向异性 η/s 比率则是

$$\frac{\eta_{\perp}}{s} = \frac{1}{4\pi}, \quad \frac{\eta_{\parallel}}{s} = \frac{1}{4\pi}\frac{g_{zz}(r_H)}{g_{xx}(r_H)}$$

当 $B = 0$ 时，可以恢复各向同性结果 $\frac{\eta_{\perp}}{s} = \frac{\eta_{\parallel}}{s} \equiv \frac{\eta}{s} = \frac{1}{4\pi}$，因为在这种情况下，背景度量是各向同性的，即 $g_{zz} = g_{xx}$。在非零磁场下，只有 $\frac{\eta_{\parallel}}{s}$ 随外部磁场 B 的变化而变化，而 $\frac{\eta_{\perp}}{s} = \frac{1}{4\pi}$ 是常数。在图 3.2 中，展示了在有限（T, eB）情况下，磁场 EMD 模型下 $\frac{\eta_{\parallel}}{\eta_{\perp}}$ 的结果。磁场的各向异性剪切粘性在沿磁场方向上低于在横向平面上，随着磁场强度的增加，其值会减少。沿外部磁场方向，强耦合磁化介质随着磁场的增强而逐渐接近理想化的完美流体极限。

4 总结与展望

在本研究中，我们提供了一个最新的定量全息 EMD 模型回顾，用于描述在相对论性重离子碰撞中产生的高温强耦合 QGP。我们回顾了两类全息 EMD 构造：一类是在有限温度和巴里昂化学势下的各向同性 EMD 模型，并且电磁场为零；另一类则是有限温度和磁场下的各向异性 EMD 背景，巴里昂化学势为零。我们讨论了全息对偶理论如何根据所考虑的不同类的规范-引力模型，以及如何通过现象学输入来修正其自由参数，从而定量地为高温去混合 QGP 相提供可靠的预测。以下是这些关键结果的总结，突出显示了 EMD 模型预测可靠性的证据：

i. EMD 模型在 QCD 的 (T, μ_B)-平面上的应用：在图 2.3 和图 2.4 中，我们分别展示了在有限温度和巴里昂化学势下的全息方程状态的预测结果，以及在 $\mu_B = 0$ 时第六阶和第八阶巴里昂易变性的预测结果，并与现有的第一性原理 LQCD 结果进行了比较；在图 2.6(d) 中，我们展示了在零巴里昂密度下，全息模型对于比容粘性与熵密度比的预测结果，并与最新的现象学多阶段模型的结果进行了比较，这些模型能够同时描述来自相对论性重离子碰撞的多个实验数据。作为一个各向同性且平移不变的全息模型，具有两阶的重力场导数，该模型自然地包含了一个小的剪切粘性系数，$\eta/s = 1/4\pi$，这与在重离子碰撞中估计得到的强耦合 QGP 的整体粘性结果是一致的。文献中目前已有多种全息 EMD 模型，并且这些模型也已经成功地在

定量上描述了 LQCD 结果，如参考文献 [164-166] 所展示的工作。

ii. 磁场下的 EMD 模型在 QCD 的 (T, eB)-平面上的应用：在图 3.1 中，我们展示了全息模型在有限温度和磁场下的各向异性方程状态的预测结果、临界温度、重整化的 Polyakov 环路以及重夸克熵，并与现有的第一性原理 LQCD 结果进行了比较。

全息 EMD 模型能够超越当前格点量子色动力学（LQCD）模拟的限制。例如，该模型预测了存在一个临界终点。尽管不同的竞争性 EMD 模型在拟合 $\mu_B = 0$ 的 LQCD 结果后，对临界点位置的预测存在差异，但它们均表明在 QCD 相图中一个大致相似的区域内存在临界点。这种临界点分布的多样性显然激励我们通过贝叶斯统计推断，对自下而上类全息 EMD 模型的不同参数化和自由参数进行更系统的研究。

在参考文献 [219] 中详细展示了此类模型的贝叶斯分析，但在第 2.1.3 节中讨论了初步结果。该贝叶斯分析采用自由参数的均匀先验分布，以 LQCD 结果中的熵密度和 $\mu_B = 0$ 时的重子易感性作为约束条件，全息 EMD 模型自由参数的后验分布受到强烈约束，如表 2.1 所示。在这些约束后验分布内，生成了数千种不同的 EMD 模型，提供了 QCD 状态方程在有限温度和重子密度下行为的预测。所得状态方程的带宽极窄，如图 2.7 所示，与最先进的格点 QCD 状态方程结果在有限重子密度下也达到了定量一致。有关超出当前格点模拟范围的相图区域以及更广泛的全息 EMD 模型预测的临界点分布的完整分析，请参见 [219]。

我们还详细探讨了全息方法在描述高温 QCD 现象学时的主要局限性和缺点。首先，具有两阶度量场导数的经典全息规范-引力模型缺乏渐近自由性，其边界上的对偶有效量子场论（QFT）在所有能量尺度上均为强耦合状态。这在模型中温度无关的 $\eta/s = 1/4\pi$ 值中尤为明显，与渐近高温下类似气体的 pQCD 结果形成对比。经典全息规范-引力模型并非具有平凡的紫外固定点，而是具有强耦合的紫外固定点，因而是渐近安全的，而非渐近自由的。缺乏渐近自由性以及 $\eta/s = 1/4\pi$ 的常数值可能与经典引力理论中忽略了大质量弦态和量子弦环的贡献有关。通过考虑与大质量弦态相关的高阶导数修正，这一问题可能得到改进。已有文献 [129] 表明，在非平凡迪拉通背景下，此类修正可生成温度依赖的 η/s 分布。然而，系统构建现象学上真实且完全反作用的迪拉通模型，并纳入高阶导数修正，仍是一项未在文献中完成且具有挑战性的任务。

经典的全息量子引力模型有一个普遍的局限性，即它们无法描述 QCD 中具有束缚相的强子共振气体相的热力学和传输性质。这个局限性与经典量子引力模型中大 N_c 特性有关，在束缚相中，压力通常会受到一个 $\sim N_c^{-2}$ 的乘法因子的抑制，而在去束缚的夸克胶子等离子体（QGP）相中则没有这种抑制。理论上，可以通过考虑量子弦回路对扩展的弦-重力模型的贡献来改善这一局限性。然而，这个任务比之前讨论的任务要复杂得多。

文献中也指出了全息 EMD 模型的具体局限性和缺点。例如，重离子碰撞中实现的奇异中性条件在 EMD 模型中并没有实现，因为它只具有一个化学势（在这里讨论的是重子的化学势）。此外，在对 EMD 模型相图的研究中，未发现平方声速超过其共形极限（$c_s^2|_{CFT} = \frac{1}{3}$）的区域，这强烈表明这些

模型不足以描述最重中子星的密集 QCD 方程状态 [335-342]。另外，如第 3.1 节所述，磁性 EMD 模型不足够灵活，无法通过单一的麦克斯韦-稜形耦合函数 $f(\phi)$ 同时描述 QGP 的磁场和电场部分。

对于未来的工作，重要的是将扩展的弦-重力方法用于同时考虑由守恒的重子、电荷和奇异性荷电引起的反馈效应。这样的努力将使得实现奇异中性成为可能，这对重离子碰撞中的应用是至关重要的。为了在全息模型中一致地实现 QCD 风味对称性，EMD 类全息模型应该被更一般的（完全反馈的）爱因斯坦-杨-米尔斯-稜形（EYMD）模型所取代。

在 EMD 模型类中，有限温度和磁场下的更复杂的磁性 EMD 设置仍然未被探索。其相图的大部分尚未研究，全息重整化仍需实现，这将允许计算本文审阅中未涉及的多个物理可观察量。此外，贝叶斯分析将是理解大 B 场性质的另一个重要下一步（如在文献 [219] 中为有限重子密度的各向同性设置实施的贝叶斯分析）。

其他需要进一步发展的重要领域包括考虑旋转效应，通过采用更一般的 bulk 字段假设来考虑强耦合双重等离子体中的旋转效应，允许旋转和带电的渐近 AdS 黑洞。同时，还应该进一步推进远离平衡的全息动力学的数值模拟 [142]，例如在本文审阅的现象学现实 EMD 模型框架下考虑全息 Bjorken 流和全息冲击波碰撞。

Bibliography