

分类号: O412.1
研究生学号: 2020322007

单位代码: 10183
密 级: 公开



吉林大学

硕士学位论文

(学术学位)

规范/引力对偶方法研究 QCD 相结构

Apply Gauge/Gravity duality to study QCD phase
diagram

作者姓名: 王源旭
专 业: 理论物理
研究方向: 规范/引力对偶
指导教师: 何松 教授
培养单位: 物理学院

年 月

规范/引力对偶方法研究 QCD 相结构

Apply Gauge/Gravity duality to study QCD phase
diagram

作者姓名：王源旭

专业名称：理论物理

指导教师：何松 教授

学位类别：理学硕士

答辩日期：2023 年 5 月 26 日

摘要

规范/引力对偶方法研究 QCD 相结构

量子色动力学(QCD)是描述 QCD 物质强相互作用的基本理论。在中高能核物理领域, QCD 物质的相变及其相结构一直是一个重要的课题。

由于低能 QCD 的强耦合性质, 微扰方法将不再适用。近年来, 格点 QCD(LQCD)和一些低能有效模型的探索表明, 在低温低化学势下的强子相和高温高化学势下的夸克-胶子等离子体(QGP)之间存在一个一阶相变的临界终点(CEP 点)。这个临界终点意味着当化学势高于临界化学势时, 两者之间的相变是一阶相变, 低于临界化学势时, 两者之间存在被称为 Crossover 的平滑过渡区域。在定量讨论上, 虽然格点 QCD 可以给出零化学势下的状态方程, 但是在有限化学势下却会遇到符号问题而难以计算。

1997 年 Maldacena 提出反德西特/共形场论(AdS/CFT)对偶猜想, 一个关于强弱理论对偶的猜想。AdS/CFT 对偶已经被广泛应用于各个领域, 并成为了解决强耦合问题的有力工具。本文将采用该对偶方法研究 QCD 相变的相关问题。

我们基于 Einstein-Maxwell-Dilaton(EMD)模型, 构造了一个用于定量描述有限温度有限化学势下 QCD 相图的全息 QCD 极小模型, 并通过与格点 QCD 的最新成果比对, 包括 QCD 状态方程、重子数极化率等, 来固定模型中的自由参数。

基于该模型, 我们得到有限化学势下的状态方程, 其与最新格点 QCD 的结果相符。进一步, 我们给出 QCD 在有限温度有限重子数化学势下的可靠相图, 尤其是 CEP 点与一阶相变线。作为自洽性检验, 我们通过探子的方式研究了夸克胶子凝聚, 并得到与 LQCD 相符合的结果。最后, 我们计算该模型预言的一阶相变诱导引力波的能谱, 发现其可能被 IPTA 和 SKA 所观测, 甚至在某些极端条件下被 NANOGrav 观测到。

关键词: AdS/QCD 对偶, QCD 相图, 相变诱导引力波

Abstract

Apply Gauge/Gravity duality to study QCD phase diagram

Quantum chromodynamics (QCD) is the fundamental theory describing QCD-matte interactions. In medium/high energy nuclear physics, determining the location of the critical endpoint is crucial for understanding the phase structure of QCD species.

However, due to the strong coupling property of QCD at low energy scales, perturbation methods are not applicable. Recent explorations of lattice QCD (LQCD) and low-energy effective theories suggest the existence of a critical endpoint (CEP) between the hadronic phase and the quark-gluon plasma (QGP). The CEP indicates that the phase transition between the two phases is first-order when the chemical potential is higher than the critical value, while a smooth transition, known as a "Crossover" occurs when the chemical potential is lower. Although LQCD can provide equations of state at zero chemical potential, obtaining equations of state at finite chemical potential is challenging due to the sign problem.

In 1997, Maldacena proposed the Anti-de Sitter/Conformal Field Theory (AdS/CFT) dual conjecture, which has become a powerful tool for studying strongly coupled systems. This study utilizes the gauge/gravity duality to investigate QCD phase transitions.

We fix the model parameters by comparing the model results with the latest data of lattice QCD, e.g., the equations of state, baryon number susceptibility, etc. Further, our model predicts the equations of state at finite chemical potential, which agrees with the recent LQCD simulation. We offer a reliable phase diagram of QCD under finite temperature and finite baryon number chemical potentials, including the precise location of CEP and the first-order transition line between the QGP and Hadron gas. Furthermore, we apply holographic probe action to study quark and gluon condensation, which agrees with LQCD data. Moreover, we explore the possibility of the first-order

||

phase transition in the model-predicted phase diagram as the first-order transition in the early universe and calculate its gravitational wave energy spectrum. Our results indicate that IPTA and SKA can observe it, and even NANOGrav under some extreme conditions.

Keywords: AdS/QCD duality, QCD phase diagram, gravitational wave

目 录

第一章 引言.....	1
第二章 量子色动力学	3
2.1. QCD 简介	3
2.2. QCD 重整化与渐近自由	6
2.3. 整体对称性.....	8
2.4. QCD 相图	9
第三章 AdS/CFT 简介	14
3.1. 弦论简介.....	14
3.2. 理解全息原理的两个图像	15
3.3. 低能下的等价性.....	17
3.4. 全息字典.....	18
第四章 全息 QCD 相结构	20
4.1. EMD 模型.....	20
4.2. 有限化学势的热力学.....	21
4.3. 运动方程.....	23
4.4. 全息重整化.....	26
4.5. 黑洞解与状态方程.....	28
4.6. 极化率与有限密度.....	32
4.7. CEP 与相图	35
第五章 夸克凝聚与相变引力波	40
5.1. 夸克胶子凝聚.....	40
5.2. 宇宙相变引力波.....	44
第六章 总结与展望	48
参考文献.....	49
附录 A.....	55

插图

图 2. 1 强相互作用精细结构常数随能标跑动情况 [4].....	7
图 2. 2 温度密度平面的 QCD 相图 [7].....	10
图 3. 1 D 膜上的开弦 (左) 与闭弦 (右) [15]	14
图 3. 2 探测器群进入黑洞的两种表述 [16].....	15
图 3. 3 格点下的粗粒化过程 [16].....	16
图 3. 4 粗粒化与全息 [16], 跑动的 J 被映射为 $d+1$ 维的动力学场 Φ	17
图 4. 1 零化学势下的状态方程与 LQCD 对比, 红色实线为全息模型结果, 绿、红、蓝色误差棒分别来源于熵、反常与压强的无量纲化后格点数据 [34].....	30
图 4. 2 零化学势下声速、比热与重子数极化率, 红色曲线为全息模型结果, 红、蓝、绿色误差棒分别来源于比热、声速平方与重子数极化率的无量纲化后格点数据 [34, 35].....	31
图 4. 3 零化学势下重子数极化率, 红色曲线为全息模型结果, 绿色误差棒来源于格点数据 [35].....	33
图 4. 4 有限化学势下的状态方程与 LQCD 对比, 实线为全息结果, 误差棒为格点数据 [35], 从上至下分别是熵、压强、能量密度、重子数密度的状态方程, 各图中从下至上、颜色从蓝至黄对应 $\mu B/T$ 从 0 取到 3.5 (间隔为 0.5)	34
图 4. 5 数值解下相图的局域稳定性。蓝色表示热力稳定, 红色表示热力不稳定.....	36
图 4. 6 不同化学势下熵随温度变化情况。实线部分表示热力稳定, 虚线表示热力不稳定.....	36
图 4. 7 声速平方在不同化学势下行为。从右至左, 从蓝色至红色分别对应 μB 为 0MeV、320MeV、440MeV、560MeV.....	37

图 4. 8 自由能在不同化学势下行为, 曲线从右至左分别是 μB 从 540MeV 至 580MeV(间隔为 10MeV)	38
图 4. 9 全息模型预测的 QCD 相图, 红色圆点为 CEP 点, 右侧黑色实线为一阶相变线.....	38
图 5. 1 轻(上)、重夸克(下)手征凝聚随温度行为, 红色为全息结果, 误差棒来自格点数据[34]	42
图 5. 2 夸克凝聚随温度行为, 红色为全息结果, 误差棒来自格点数据[34]	43
图 5. 3 夸克(下半)与胶子(上半)对迹反常的贡献, 红色虚线为全息结果. .	44
图 5. 4 一阶相变线上的重子不对称性, 蓝色为真真空, 绿色为假真空...	45
图 5. 5 $\mu B = 1000\text{MeV}$ 处的引力波能谱	46
图 5. 6 e-fold 数 N 随 $\mu B/T$ 的行为.....	47

表 格

表 3. 1 全息字典部分总结..... 19

第一章 引言

长期以来的探索表明自然界存在四种相互作用力：电磁力、弱相互作用力、强相互作用力和引力。其中，除引力外，其余三种作用力都可以被量子场论所描述，并构成了现代粒子物理标准模型。

强相互作用力的作用尺度仅为核子大小，其相互作用强度却最强。对该力的研究可以追溯到 1963 年，Gell-Mann 和 Zweig 提出的以“夸克(quark)”为基本组分来解释强相互作用粒子谱的模型。考虑到强子的量子数，模型假设了上(u)、下(d)和奇异(s)三种夸克。后来又在此基础上又加入了粲(c)、底(b)、顶(t)等夸克，这些不同种类的自由度被称为味道(flavor)。

夸克模型内含了强相互作用中重要的对称性：由于上下两个夸克有相近的质量，可以假设两者在质量和相互作用上相同，因此在 u、d 态上可以作用一个么正旋转即 SU(2)群。类似地，考虑三重态(u,d,s)的么正变换即 SU(3)。Gell-Mann 和 Ne'man 成功证明低能介子可以填充上 SU(3)对称性的不可约表示^[1]。

然而模型也存在两个严重的问题：第一个是目前没有发现任何带有分数电荷的自由粒子。第二个是如果在重子考虑下假设夸克在自旋和味道变换下完全对称，那么与 1/2 自旋夸克应该服从的费米-狄拉克统计相矛盾。

为了解决问题，Han 和 Nambu, Greenberg 和 Gell-Mann 提出了新的量子数：颜色。模型在重子波函数上额外要求颜色上的反对称，即夸克在自旋和味道上是对称的，但整体上是反对称的，从而与费米-狄拉克统计保持一致。

颜色对称性与规范群联系起来，夸克的色自由度属于局域规范群的基础表示，SU(3)规范场的粒子被称为胶子，整个理论即为量子色动力学(QCD)。

与强相互作用力的研究相对应的，1916 年爱因斯坦成功地建立了广义相对论。通过经典几何的语言来描述时空大尺度上的弯曲。但广义相对论仍是一种经典场论，其量子化的尝试尚未成功。

Maldacena 基于弦论于 1997 年提出了 Anti-de Sitter/Conformal Field Theory (AdS/CFT)对偶。一个全新的途径应运而生，既是将弦论与实际相联系的路径，也是将高维下的量子引力理论与低维场论相联系的路径。经过多年发展，演化

为了更为广泛的规范引力对偶。

本文将应用规范引力对偶，通过求解高维引力理论来研究 QCD 的温度密度相结构的相关问题。

文章结构如下：第一章为引言，对研究背景进行概述；第二章介绍量子色动力学 QCD 的部分主要内容；第三章简要说明 AdS/CFT 对偶的相关知识，包括弦论简介、全息的物理图像以及等价性与全息字典；第四章是论文的重点章节，将从模型构建以及相图预言等方面介绍本人的研究工作；第五章基于模型对夸克胶子凝聚和引力波进行初步研究；第六章对研究内容进行总结与展望。

第二章 量子色动力学

量子色动力学(QCD)理论作为描述强相互作用力的基本理论有着非常丰富的内容。本章对其中部分相关内容进行概括,包括基本概念、对称性、相图等方面,旨在为后续章节的内容做铺垫。

2.1. QCD 简介

经典的 QCD 拉氏密度以夸克和胶子场作为基本的自由度^[2]:

$$\mathcal{L} = \bar{q}^\alpha (i\gamma^\mu D_{\mu\alpha\beta} - m\delta_{\alpha\beta})q^\beta - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

正如引言所提到的,它要满足 SU(3)的颜色对称性。其中,夸克场 q^α 和胶子场 A_μ^a 分别属于 SU(3)的颜色三重态与八重态,故 α 取 1-3, a 则取 1-8。默认重复指标代表求和。

对这一经典拉氏量,让我们首先从自由夸克场开始理解,色空间下的自由夸克场拉氏量密度^[3]:

$$\mathcal{L}_0 = \bar{q}(i\rlap{/}\partial - m)q, \quad (2.2)$$

包含了夸克场的质量项与动能项。其中, $\rlap{/}\partial \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$, γ^μ 在 Dirac 表象下表示为

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \beta\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

其中的 σ 为 Pauli 矩阵, 0、1 均是 2×2 的矩阵。

考虑在色空间中的特殊么正变换,即 SU(3)变换 U 。由于是 3 维复空间,在变换下要满足如下关系:

$$q^\alpha \rightarrow (q^\alpha)' = U_\beta^\alpha q^\beta, \quad UU^\dagger = U^\dagger U = 1, \quad \det U = 1, \quad (2.4)$$

最终剩下的独立自由度为 8。因此,可以将任一变换 U 做如下表示:

$$U = \exp\left\{i \frac{\lambda^a}{2} \theta_a\right\}, \quad (2.5)$$

其中, a 取 1-8, $\frac{1}{2}\lambda^a$ 为 SU(3)群的基础表示生成元, 也记为 t^a , θ_a 则是群参数。

U由这 8 个独立的厄米矩阵 λ^a 线性叠加表示。

在 SU(2)的情况下, λ^a 就是 Pauli 矩阵。所以 SU(3)下的 8 个厄米矩阵可以看作 Pauli 矩阵的推广, 称为 Gell-Mann 矩阵^[2]:

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

满足关系如下:

$$[t^a, t^b] = i f_{abc} t^c, \quad (2.7)$$

其中, f_{abc} 被称为结构常数, 指标 abc 完全反对称。对于 N=2 的情形(SU(2)),

f_{abc} 简化为反对称张量 ϵ_{ijk} , 其中 $\epsilon_{123} = 1$ 。对于 N=3, f_{abc} 的非零成员有:

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1, \\ f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} &= \frac{1}{2}, \\ f_{458} = f_{678} &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

从(2.5)的变换U可以明显看出, 对于颜色的整体规范变换拉氏量密度是不变的。

但是若考虑 θ_a 依赖于时空坐标的局域规范变换, 则发现动能项是变的。为了保持颜色的“严格”规范不变, 即令动能项在局域变换下不变, 需要引入协变微商 D_μ 来代替原有的普通微商 ∂_μ 如下:

$$D_\mu q = \left[\partial_\mu - i g_s \frac{\lambda_a}{2} A_\mu^a(x) \right] q \equiv [\partial_\mu - i g_s A_\mu(x)] q, \quad (2.9)$$

其中, g_s 为强相互作用的耦合常数, 有时也会用 α_s 来定义, A_μ^a 为胶子场。 A_μ 是

矩阵 λ^a 与 A_μ^a 的缩写形式。引入胶子场的场强张量如下：

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_s f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (2.10)$$

在规范不变性要求下，我们可以总结得出在 SU(3)规范变换 U 下各场以及分量的变换性质为：

$$\begin{aligned} q &\rightarrow Uq, & gA_\mu &\rightarrow U(gA_\mu + i\partial_\mu)U^\dagger, \\ F_{\mu\nu} &\rightarrow UF_{\mu\nu}U^\dagger, & D_\mu &\rightarrow UD_\mu U^\dagger. \end{aligned} \quad (2.11)$$

最后，我们考虑胶子动能项的归一化，便可以得到严格满足 SU(3)规范不变性的最终拉氏量(2.1)式。

不同于量子电动力学(QED)，QCD 的低能量子效应较为重要。为了得到相关规律的描述，需要对(2.1)的经典拉氏量做量子化。规范理论的量子化主要有正则量子化与泛函量子化等方法。以泛函量子化方案为例，我们先定义带有外源 J 的配分函数^[2]：

$$Z[J] = \int [dA dq d\bar{q}] \exp\{i \int d^4x (\mathcal{L} + J\Phi)\}, \quad (2.12)$$

$Z[J]$ 是指时间从负无穷到正无穷的真空跃迁振幅。泛函积分是针对 q 、 \bar{q} 以及 A_μ^a 进行的，所以外源 $J\Phi = \bar{\eta}q + \bar{q}\eta + j_a^\mu A_\mu^a$ ，其中 η 、 $\bar{\eta}$ 以及 j_a^μ 是外源场。由于积分测度与拉氏量是规范不变的，所以显然 $Z[0]$ 也是规范不变的。由于规范场之间可以通过规范变换相联系，它们会在 $Z[0]$ 中被重复计算。因此，我们需要在规范的等价场中选择一个场作为代。

具体地，我们需要确定一个规范固定条件 $G(A) = 0$ ，这里的 G 是任意的，常见的规范固定有协变规范($G(A) = \partial^\mu A_\mu - f(x)$)、轴规范($G(A) = n^\mu A_\mu$, $n^2 < 0$)等。其中，协变规范会引进两个独立的 Grassmann 场 c 与 \bar{c} ，被称为鬼场与反鬼场。

2.2. QCD 重整化与渐近自由

在场论中，例如 QED 理论，当我们计算量子圈图修正时，高动量中间态会带来 UV(紫外)发散。QCD 理论也同样也会遇到这些问题。为了有效的计算高阶量子修正(圈图)，我们需要进行重整化来得到有限的量。

一般地，我们将这些发散与拉氏量中的一些参数相联系以进行重整化。这些拉氏量中的原参数被称为裸参数，吸收发散后称为重整化参数。

在重整化操作之前，我们需要对 Feynman 图中的发散积分进行正规化操作，以分离出发散部分。正规化操作有紫外截断、解析正规化和维度正规化三种。

其中，紫外截断方法是在动量空间的积分上限处截取一个有限大数来代替无穷大，从而去掉发散；解析正规化则是将被积函数中分母的幂次提高，从而使结果收敛；维度正规化是将原本在四维空间的积分转变至 $(4 - \epsilon)$ 维的空间中计算，通过小参数 ϵ 的引入使得积分收敛。需要注意的是，维度正规化方法可以保证规范不变以及 Lorentz 协变性。

显然，观测量如质子质量、介子衰变常数等不能作为重整化参数。参数通常选择耦合常数 g 、夸克质量 m 和规范参数 ξ 。重整化过程依赖于重整化时的能标，用 κ 表示，也被称为重整化点。

为了考虑跑动耦合常数随重整化能标的变化行为，我们定义 β 函数：

$$\beta = \kappa \frac{\partial g}{\partial \kappa}, \quad (2.13)$$

对应于不同文章的写法，一般有 $a = \alpha_s/\pi = g^2/4\pi^2$ 。当我们选取维度正规化的最小减除方案时， β 依赖于 g 的展开如下：

$$\beta(g) = -\beta_0 g^3 - \beta_1 g^5 + \dots, \quad (2.14)$$

$$\beta_0 = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(11 - \frac{2}{3} N_f \right), \quad \beta_1 = \frac{1}{(4\pi)^4} \left(102 - \frac{38}{3} N_f \right), \quad (2.15)$$

其中 N_f 表示夸克味道的数目， β_0 和 β_1 分别是单圈和 2 圈的修正，随着我们要考虑的圈数越高， β 的展开也就越长。 α_s 的具体形式如下：

$$\alpha_s(\kappa) = \frac{1}{4\pi\beta_0 \ln(\kappa^2/\Lambda_{QCD}^2)} \left[1 - \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \frac{\ln(\ln(\kappa^2/\Lambda_{QCD}^2))}{\ln(\kappa^2/\Lambda_{QCD}^2)} + \dots \right], \quad (2.16)$$

其中的 Λ_{QCD} 作为(2.13)的积分参数引入，被称为 QCD 标度参数。

下图 2.1 是综合 e^+e^- 湮灭、深度非弹性散射等各种过程总结的跑动耦合常数^[4]：

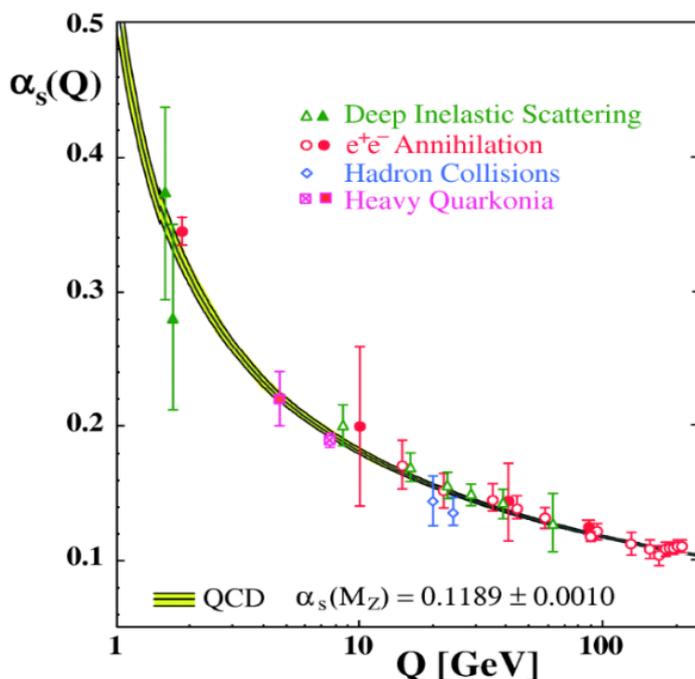


图 2.1 强相互作用精细结构常数随能标跑动情况[4]

类似的，考虑夸克质量作为重整化参数，其满足的流方程如下：

$$\kappa \frac{d}{d\kappa} m = -\gamma_m(g)m, \quad (2.17)$$

$$\gamma_m(g) = \gamma_{m0}g^2 + \gamma_{m1}g^4 + \dots, \quad (2.18)$$

对于领头阶，解为：

$$m(\kappa) = \frac{\bar{m}}{\left(\frac{1}{2} \ln(\kappa^2/\Lambda_{QCD}^2)\right)^{\gamma_{m0}/2\beta_0}}, \quad (2.19)$$

其中 \bar{m} 是(2.17)的积分常数。

考虑(2.14)和(2.15)式，容易发现 β 为负。从(2.13)式看，这意味着 $g(\kappa)$ 随着 κ 的增大反而减小。这个性质被称为 UV(紫外)渐近自由。

(2.16)式可以看出跑动耦合常数随 κ 增加以对数方式减小， κ 足够大的话我们就可以使用微扰理论。但同时也意味着低能时， g 变大，出现颜色禁闭，微扰的方法将遇到困难。

2.3. 整体对称性

对于(2.1)的经典拉氏量而言,除了 $SU(3)$ 的规范对称性,还有手征对称性与伸缩对称性^[2]。

手征对称性的自发破缺是 QCD 在低能区的一个重要性质。如果认为 QCD 真空有近似手征对称性,那么强子谱中会有质量相同的多重态,但这与实验不符,因此手征对称是自发破缺的。一般考虑夸克质量为零时,手征对称性是严格满足的,也被称为 QCD 手征极限。但若是考虑带有质量的夸克,手征对称性就会被破坏。自发破缺一般认为发生在能标 1GeV 以下,这一区域属于非微扰区。

引入左手和右手夸克^[2]:

$$q_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)q, \quad q_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)q, \quad (2.20)$$

可以理解为夸克场在左右手方向的投影。

先考虑带有质量 m 的夸克,这自然地要求夸克场有 N_f 的味道,我们做以下表示:

$$q^f = (u, d, s, \dots). \quad (2.21)$$

拉氏量可以分解为^[2]:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_L + \mathcal{L}_R - (\bar{q}_L m q_R + \bar{q}_R m q_L), \quad (2.22).$$

其中, m 为 $N_f \times N_f$ 的矩阵。

容易看到,当 m 为0时, \mathcal{L} 在如下 $U_L(N_f) \times U_R(N_f)$ 变换下保持不变,即满足手征对称性:

$$q_L \rightarrow \exp(-i\theta_L^j \lambda^j) q_L, \quad q_R \rightarrow \exp(-i\theta_R^j \lambda^j) q_R, \quad (2.23)$$

其中, $\theta_{L,R}^j (j = 0, 1, \dots, N_f^2 - 1)$ 是变换参数, $\lambda^j = 2t^j (j = 1, \dots, N_f^2 - 1)$, $\lambda^0 = \sqrt{2/N_f}$ 。

我们也可以定义如下的矢量和轴矢量变换:

$$q \rightarrow \exp(-i\theta_V^j \lambda^j) q, \quad q \rightarrow \exp(-i\theta_A^j \lambda^j \gamma_5) q, \quad (2.24)$$

这是一个 $U_V(N_f) \times U_A(N_f)$ 变换。其中, $\theta_L = \theta_V - \theta_A$, $\theta_R = \theta_V + \theta_A$ 。这个变换中包含两个 $U(1)$ 变换, 分别是重子数对应的 $U_B(1)$ 和轴矢量转动对应的 $U_A(1)$ 。

低能下的夸克凝聚会导致手征对称性的自发破缺, Goldstone 定理^[5]可以提供一定的解释, 即对称性的破缺对应无质量的 Goldstone 粒子。

除手征对称性外, QCD 还具有伸缩对称性, 即在如下标度变换下拉氏量 (2.1) 保持不变 (手征极限下):

$$q(x) \rightarrow \sigma^{3/2} q(\sigma x), \quad A_\mu^a(x) \rightarrow \sigma A_\mu^a(\sigma x). \quad (2.25)$$

在考虑量子效应下, 伸缩对称性会被破坏, 我们可以得到迹反常^[2]:

$$\partial_\mu \Delta^\mu = T_\mu^\mu = \frac{\beta}{2g} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + (1 + \gamma_m) \sum_q \bar{q} m_q q, \quad (2.26)$$

其中, Δ^μ 是伸缩流, $T_{\mu\nu}$ 是能动张量。

2.4. QCD 相图

当物质被加热时, 原子核溶解为核子, 同时轻强子 (如 π 介子 pion) 产生并充斥在核子中间。由于空间有限, 介子、强子与原始的核子重叠, 进而形成一个由夸克、反夸克和胶子构成的区域。在一定临界温度 T_c 下, 这种区域会“渗透”至整个体积, 形成夸克胶子等离子体 (QGP: quark-gluon plasma) 的物态^[6]。另一个相变的图像是通过将物质压缩来实现的。核子以一定临界数密度重叠进而形成冷 QGP, 这种情形很有可能出现于中子星中。

QCD 相图通常用温度 T 和重子数化学势 μ_B 平面来表示, 它有两个特征行为: 手征对称性破缺与恢复和夸克胶子禁闭退禁闭。在手征极限下, QCD 具有严格手征对称性, 对称性在 $T = \mu_B = 0$ 处破缺又在高温或高密区恢复。QCD 相变在无动力学夸克的情况下还可以由分立对称性 $Z(N_c)$ 描述, 禁闭相满足该对称性, 退禁闭相则发生破缺。

图 2.2 总结了目前人们对 QCD 的 $T - \mu_B$ 相图的认识^[7]。重子数化学势 μ_B 对

应着某一温度压强下添加或移除一个重子数的能量，反映着物质净重子数密度。

低温低化学势区域表示强子相，在高温高化学势区域代表着夸克胶子等离子体。低化学势下的相变对应着早期宇宙在大爆炸后几微秒内的一个阶段，在这一低化学势区域发生的相变是一种平滑过渡的相变，被称为 Crossover，在图中用白色虚线表示；而在较高化学势下的相变是由白色实线表示的一阶相变。更高化学势处(低温高密区)的相变接近中子星核心处的重子数密度。在低温和极高化学势区域预测会有色超导相(Color-Superconductor)存在。

在平滑过渡的 Crossover 和一阶相变之间有一个分界点，一阶相变临终点，被称为 CEP (Critical End Point)点。CEP 点与一阶相变线的位置是相图研究中的重点。

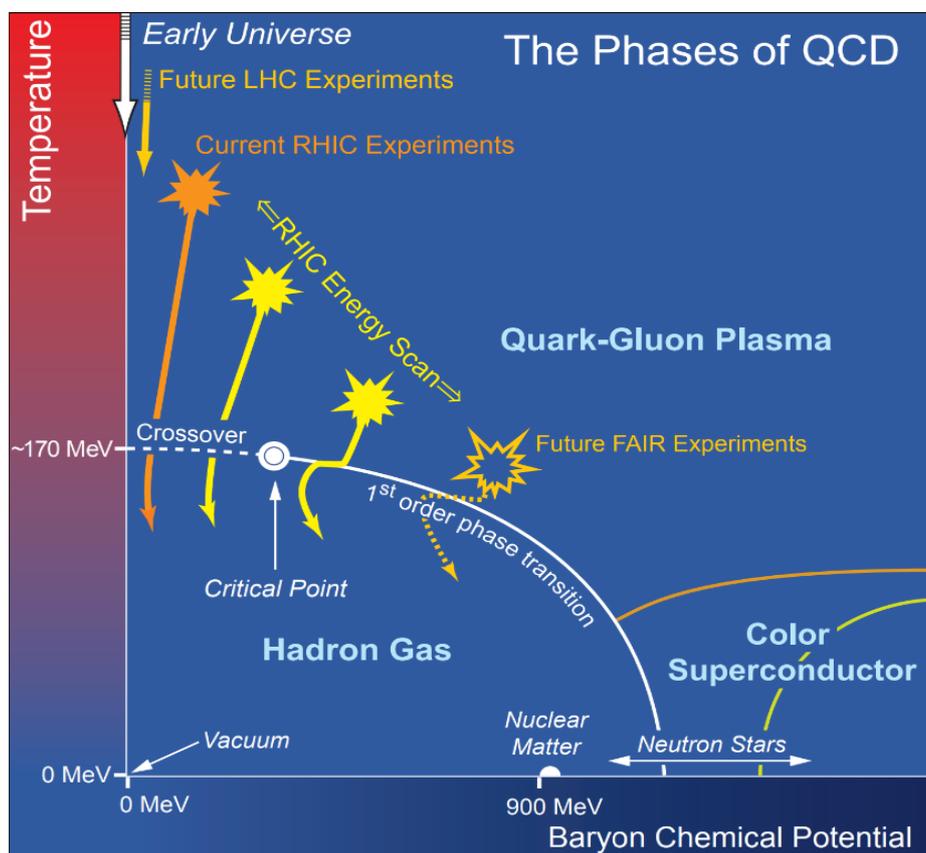


图 2. 2 温度密度平面的 QCD 相图 [7]

关于 QCD 相图，目前有很多在实验和理论模型上的探索。实验方面，如图 2.2 所示，在极低化学势处有 LHC(大型强子对撞机)实验进行探索，较高化学势则是 RHIC(相对论重离子碰撞)能量扫描的区域，更高区则有 FAIR(反质子与离子研究装置)未来的更多实验装置。

目前研究 QCD 非微扰区物理的方法主要有： NJL (Nambu-Jona-Lasinio)模型、DSE (Dyson-Schwinger equation)方法、泛函重整化群 (FRG: Functional Renormalization Group)以及格点 QCD (LQCD: Lattice QCD)等。

NJL (Nambu-Jona-Lasinio)模型基于 QCD 的手征对称性这一关键特性。对 N_f 味夸克，其拉氏量经典表述为^[2]：

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{q}(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)q + \frac{g_{NJL}}{2} \sum_{j=0}^{N_f^2-1} [(\bar{q}\lambda^j q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\lambda^j q)^2], \quad (2.27)$$

其中，第一项是夸克的运动学项，第二项为耦合常数为 g_{NJL} 的手征对称的四费米子相互作用项。当 g_{NJL} 超过临界值时，手征对称性发生动力学自发破缺。同时， $\langle\bar{q}q\rangle$ 凝聚使得夸克获得除流质量外的额外组分质量 $2g_{NJL}\langle\bar{q}q\rangle$ 。这解释了强子质量远大于夸克质量的问题。

该模型可直接用于高温高密度下的手征对称性破坏与恢复，是描述手征对称自发破缺最成功的模型之一^[8]。

DSE (Dyson-Schwinger equation)方法一般为了方便数值计算采用 Euclidean 空间。生成泛函如(2.12)所示，其中外源 $J\Phi$ 重新记作 $j_i\phi_i$ ， ϕ_i 包含夸克场、胶子场、鬼场等。假定场位形空间有平庸边界条件，可以得到 Dyson-Schwinger 方程：

$$0 = \int D\phi \frac{\delta}{\delta\phi_i} e^{-S_E + j_i\phi_i}, \quad (2.28)$$

利用联通格林函数生成泛函与单粒子不可约顶角的生成泛函之间的关系 $\int d^4x \frac{\delta^2 W}{\delta j_i(x)\delta j_k(z)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta\phi_k(z)\delta\phi_j(y)} = \delta^4(x-y)\delta_{ij}$ 可以把(2.28)转化为具体的 QCD 各类格林函数所满足的方程，进而求解得到 QCD 非微扰区的性质。

需要注意的是，DS 方程中包含了所有的格林函数，因此方程之间是无穷耦合的，无法进行精确求解。为了确保方程的可解性，通常需要对方程组进行截断，例如采用胶子传播子或夸克胶子顶点的一些合理假设。

泛函重整化群 FRG (Functional Renormalization Group)方法首先引入一个依赖于能标 k 的红外截断函数 ΔS ^[9]：

$$\Delta S = \frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} R_k(q) \chi_a^*(q) \chi^a(q),$$

$$S_k = S + \Delta S - \sum_q J_a^*(q) \chi^a(q), \quad (2.29)$$

其中, χ 为实标量场。通过要求 $k \rightarrow 0$ 时 $R_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ 时 R_k 发散, 使得有效作用量中 $q^2 < k^2$ 的贡献压低。利用勒让德变换, 我们定义 $\tilde{\Gamma}_k$:

$$\tilde{\Gamma}_k[\psi] = -W_k[J] + \sum_q J_a^*(q) \psi^a(q), \quad (2.30)$$

其中, $\psi^a(q) = \langle \chi^a(q) \rangle = \frac{\partial W_k}{\partial J_a^*(q)}$ 。

对其做微商会发现 k 的依赖仅来自于 R_k 。通过定义 $\Gamma_k = \tilde{\Gamma}_k - \Delta S$, 最终可以得到泛函重整化群方程:

$$\frac{\partial}{\partial k} \Gamma_k[\psi] = \frac{1}{2} Tr \left\{ [\Gamma_k^{(2)}(\psi) + R_k]^{-1} \frac{\partial}{\partial k} R_k \right\}, \quad (2.31)$$

其中, $\Gamma_k^{(2)}(\psi) = \frac{\delta^2 \Gamma_k[\psi]}{\delta \psi(x) \delta \psi(y)}$, Tr 是对包含坐标空间在内的所有空间求迹。与 DS 方程方法类似, 泛函重整化群方程组也是无穷耦合的, 一般通过保留到 n 点函数, 忽略高阶项来进行截断。

格点 QCD (LQCD: Lattice QCD) 基于第一性原理, 将欧式时空格点化后进行计算。夸克场定义于格点上, 而胶子场定义于相邻格点的连接上。

原有的 QCD 拉氏量变为格点规范形式。配分函数可概括为^[2]:

$$Z[0] = \int \prod_{n,\mu} [dU_\mu(n) d\bar{q}(n) dq(n)] e^{-[S_g(U) + S_q(q, \bar{q}, U)]}, \quad (2.32)$$

S_g 与 S_q 分别是胶子和夸克的作用量。欧式时空格点化为 $x_i = a n_i (i = 1, 2, 3, 4)$, 其中 a 为格点间距。夸克场在格点上由 n 标记, 记作 $q(n)$ 。规范连接 $U_\mu(n) = U(n, n + a\mu)$, 在 $a \rightarrow 0$ 时, $U_\mu(n) = \exp(iagA_\mu(n))$ 。

由于计算量非常大, 一般采用蒙特卡洛模拟, 相应物理量取平均。遗憾的是, 在有限化学势下会遇到符号问题(sign problem)而难以计算^[10]。

综上，各种非微扰方法都具有相应的局限性，例如 DS 方程与 FRG 的截断、LQCD 在有限化学势下的符号问题等。这些探索提供了相互印证的重要信息，为相关研究提供了支持。同时，这些探索也凸显了在 QCD 非微扰区研究相结构的困难和重要性。

第三章 AdS/CFT 简介

Maldacena 于 1997 年提出了 AdS/CFT 对偶，该对偶给出了大 N 极限下 $AdS_5 \times S^5$ 中的 IIB 型弦论与 $N = 4$ 的 SYM 理论的精确对应^[11]。经过多年发展^[12, 13]，其已经成为处理强耦合问题的重要工具。

3.1. 弦论简介

由于 AdS/CFT 对偶源于弦论中的开弦与闭弦对偶，为了更好地理解，这里对弦论进行简要介绍^[14]：

弦论将基本粒子视为弦的不同振动模式。弦的尺度为 l_s ，张力为 $T_s = 1/(2\pi l_s^2)$ 。弦的动力学用世界面上 Nambu-Goto 作用量描述^[15]：

$$S_{NG} = \int_M d\tau d\sigma \mathcal{L}_{NG} = -T_s \int_M d\tau d\sigma (-\det h_{ab})^{1/2}, \quad (3.1)$$

其中，

$$h_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu, \quad (3.2)$$

M 是世界面， h_{ab} 是时空度规在 M 世界面上的诱导度规。

D 膜是弦论中的一个重要概念。对于 II 型弦论，它是真空的非微扰对象。往往用 p 表示膜的维数。开弦的端点在 D 膜上，而闭弦则可以远离膜^[15]，如下图 3.1 所示：



图 3.1 D 膜上的开弦(左)与闭弦(右) [15]

3.2. 理解全息原理的两个图像

对于全息原理的物理图像，我们可以启发性的从黑洞与重整化两个方面去理解^[16]。

第一个方面，从黑洞出发，考虑一个 $(d + 1)$ 维的黑洞，我们在远处向其发射一个探测器，探测器每秒会进行一次闪烁。在探测器的视角看，它将在有限次的闪烁后抵达黑洞视界处。然而，对于远处的观察者来说，由于黑洞的强大引力，光线不得不做功以抵抗引力势来被观测到。这将导致光线的红移。因此，闪烁对远处的观测者而言会越来越慢，并且到达视界以及越过视界后闪烁的光线将不会被观测到。在远处观察者眼中，探测器将逐渐减速，最终停在黑洞表面并被压缩。

接下来考虑一群遍布在黑洞周围各向同性的探测器群。对于观测者，他将看到探测器群形成的“壳”逐渐缓慢地接近黑洞并形成“膜”。对于这个“膜”而言，新进入的物体将被视为一种扰动，如同波浪一样。这意味着此时的系统对于观测者而言，可以用非重力粘性流体力学模型来描述。需要注意的是，这个描述是 d 维的。

但是在探测器的视角下，进入视界后并未有什么异常，探测器群仍然由 $(d + 1)$ 维的广义相对论(GR)所描述(暂且忽略探测器间的相互作用)。

如图 3.2 所示，我们分别有左侧图的 d 维流体力学描述和右图的 $(d + 1)$ 维引力动力学描述。这对于同一个物理过程而言是矛盾的，至少在越过视界之前^[16]。因此，这可能意味着这两种描述存在一定的等价性，就像全息原理想表达的。

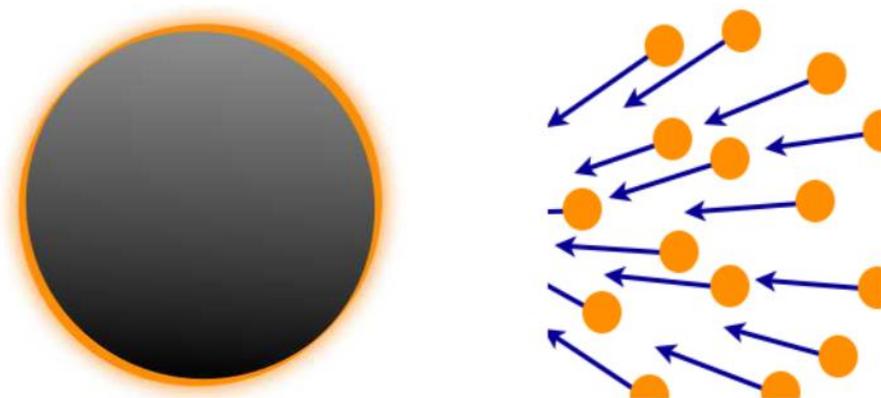


图 3.2 探测器群进入黑洞的两种表述[16]

第二个方面，在第二章的 2.2 节曾简要介绍了 QCD 的重整化，其中引入了重整化能标以及跑动耦合常数的概念。这里，我们从能标跑动的角度重新审视重整化过程，可以发现重整化是通过调整能标从而在不同尺度(或称粗粒化程度)下对物理规律进行描述。值得注意的是，重整化过程只能对系统进行粗粒化或称模糊化，而不能发现更细致的物理。

我们考虑一个经过格点化后的系统哈密顿量：

$$H = \sum_{x,i} J_i(x,a) \mathcal{O}^i(x), \quad (3.3)$$

其中， a 为格点间距， x 标记格点位置。用 i 标记各个格点上不同的算符 \mathcal{O}^i ， J 是耦合常数或算符的源。

根据 Kadanoff 和 Wilson 的重整化^[17, 18, 19]，这是一个粗粒化的过程。格点间距加大，同时新的格点以旧格点的平均值代替。如图 3.3 所示。

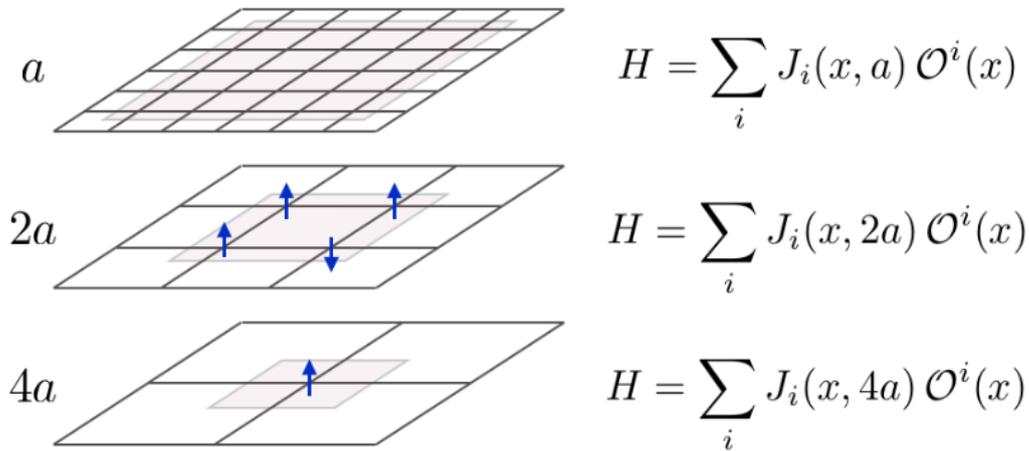


图 3. 3 格点下的粗粒化过程[16]

最后可以根据尺度 u 和 J 得到如下的 β 函数以及重整化(RG)流：

$$u \frac{\partial}{\partial u} J_i(x, u) = \beta_i(J_j(x, u), u), \quad (3.4)$$

如果将这一过程中的 u 视为一种新的维度， J 显然具有 u 的依赖，可以将其视为在更高一维理论中的场 Φ 。

如果遵循这一看法，那么如下图 3.4 所示，同样可以得到对同一系统的两

种描述，左侧是伴随着一阶 β 函数的格点理论描述。其中，纵轴是 u ， J 对 u 的依赖体现在纵向每层场的粗粒化程度中；右侧则是具有与 J 相对偶的 Φ 场的高一维引力描述。其中，纵轴是 r ，场 Φ 对 r 有依赖。

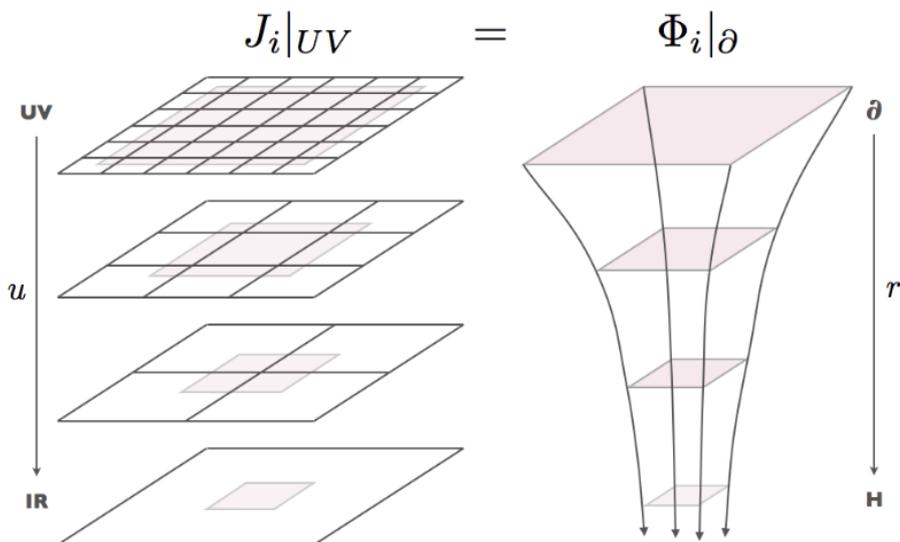


图 3. 4 粗粒化与全息[16]，跑动的 J 被映射为 $d+1$ 维的动力学场 Φ

3.3. 低能下的等价性

前面大致讲述了全息原理的物理图景，在这一小节我们主要介绍一下低能极限下两种描述的等价性^[11]：

将两种描述等价起来的核心在于建立开弦与闭弦的联系。回到 3.1 节对弦的介绍可以发现，D 膜是一个很好的突破口。例如在II型弦论中，我们将闭弦的一部分视为处于 D 膜内，就很自然地构造出了开弦概念。

我们在IIB型弦论中叠加 N 张 D3 膜，考虑低能下的情况，系统激发出无质量的弦。闭弦对应着 10 维的IIB超引力，而开弦对应着 3+1 维的超 Yang-Mills (SYM)规范理论。此时，系统总作用量为：

$$S = S_{Bulk} + S_{Brane} + S_{int} , \tag{3.5}$$

其中的 S_{Bulk} 表示闭弦的作用量， S_{Brane} 表示开弦在 D 膜上的作用量， S_{int} 表征开弦与闭弦之间的相互作用。

在取退耦极限下^[20]，保证't Hooft常数 $\lambda = 2\pi g_s N$ 固定，取 $N \rightarrow \infty$ 。可以将

S 变为相互独立的自由超引力与规范理论两个部分。要注意的是，两者分别对应 $r \gg l_s$ 的 bulk (体，可以理解为 AdS 内部) 和 $r \ll l_s$ 的近膜处这两个不同的时空区域。

当 λ 比较大时 bulk 的引力可以很好的在近膜处近似，下面我们先给出 D3 膜解^[21]：

$$ds^2 = H^{-1/2} \left(-dt^2 + \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2 \right) + H^{1/2} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2), \quad (3.6)$$

其中，我们设置一个因子 R ，其依赖于 N 、 g_s 与 α' ($\alpha' = l_s^2$)，有：

$$H = 1 + \frac{R^4}{r^4}. \quad (3.7)$$

当 $r \gg R$ 时，度规是 10 维 Minkowski 度规。而当 $r \ll R$ 时，度规将变为 $\text{AdS}_5 \times S^5$ ：

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2} \left(-dt^2 + \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2 \right) + \frac{R^2}{r^2} dr^2 + R^2 d\Omega_5^2. \quad (3.8)$$

综上所述，在近膜处以及较大的 λ 下，我们得到了两种等价的描述： $\text{AdS}_5 \times S^5$ 中的 IIB 型低能超引力与 $N = 4$ 的 SYM 理论。更一般地，二者分别去掉 S^5 以及一部分对称性后，便得到 5 维 AdS 与 4 维共形 Yang-Mills 的对偶，即所谓的规范引力对偶。

3.4. 全息字典

这一节主要对场-算符对应(Field/operator correspondence)进行简要介绍，以方便后续内容的说明。其中，引力一侧考虑一个标量场 $\phi(r, x, t)$ ，场论方面考虑的则是一个规范不变的算符 $O(x, t)$ ：

首先考虑 Klein-Gordon 形式^[22]：

$$S_{\text{KG}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{d+1} x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right), \quad (3.9)$$

其中， $1/2\kappa^2$ 是归一化因子， κ^2 与牛顿引力常数有关 ($\kappa^2 = 8\pi G_N$)。运动方程为：

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu + m^2 \right) \phi = 0, \quad (3.10)$$

在边界处，几何接近于 AdS，方程的解为^[22]：

$$\phi(r \rightarrow \infty, \vec{x}, t) = \frac{\alpha(\vec{x}, t)L^{2\Delta_-}}{r^{\Delta_-}} + \dots + \frac{\beta(\vec{x}, t)L^{2\Delta_+}}{r^{\Delta_+}} + \dots, \quad (3.11)$$

L 表示 AdS 半径。定义参数：

$$\Delta_{\pm} \equiv \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + m^2 L^2}, \quad (3.12)$$

由于是二阶微分方程，两个独立的解分别用 $\alpha(\vec{x}, t)$ 和 $\beta(\vec{x}, t)$ 表示。通常 $\alpha(\vec{x}, t)$ 被记为 ϕ_0 (或 ϕ_s)。根据 Witten 的论述，引力与场论的配分函数等价，故 α 也表示场的外源^[12]：

$$\alpha(\vec{x}, t) = J(\vec{x}, t), \quad (3.13)$$

$$Z_{\text{grav}}[\phi; \alpha(\vec{x}, t) = J(\vec{x}, t)] = Z_{\text{CFT}}[\text{source is } J(\vec{x}, t)]. \quad (3.14)$$

对于这种等价性，左端的作用量在大 N 和 λ 下，可以做鞍点近似，得到：

$$\exp i S_{\text{grav}}[\phi; \alpha = J] = \left\langle \exp i \int d^d x J(\vec{x}, t) \mathcal{O}(\vec{x}, t) \right\rangle_{\text{CFT}}, \quad (3.15)$$

这样，等式左侧是忽略了量子弦修正的经典引力，右侧是具有源的场论，从而得到场-算符对应。

类似地，对矢量场也有同样的关系：

$$Z_{\text{grav}}[A; A \rightarrow A_0] = Z_{\text{CFT}}[A_0] = \left\langle \exp i \int d^d x A_0^a J_a \right\rangle_{\text{CFT}}. \quad (3.16)$$

以下为全息字典的部分总结：

表 3. 1 全息字典部分总结

AdS_{d+1}	CFT_d
$d + 1$ 维	d 维
质量 m^2	共形维度 Δ
度规 $g_{\mu\nu}$	应力张量 $T_{\mu\nu}$
规范场 A_μ (规范不变性)	流 J_μ (流守恒)
标量场 ϕ	算符 \mathcal{O}
霍金温度 T	场论温度 T

第四章 全息 QCD 相结构

目前从全息角度主要有“top-down”、“bottom-up”两种途径研究 QCD 的现象学。

“top-down”是指从弦论出发自上而下地寻找全息 QCD 模型，如通过 $D_p - D_q$ 膜构型来符合实验上介子质量谱的 non-AdS/non-CFT^[23] 和 Sakai-Sugimoto 模型^[24] 等；“bottom-up”则主要是从 QCD 出发自下而上的构建全息模型，如硬墙^[25]、软墙模型^[26] 和 EMD 模型^[36]。

本章，我们将从有关热力学方面的介绍、黑洞求解以及 CEP 与相图确定等，来详述我们的全息模型。

4.1. EMD 模型

EMD (Einstein-Maxwell-Dilaton)模型是由原有的 ED (Einstein-Dilaton)模型发展而来。

ED 模型在热力学性质、输运性质方面已经可以很好的对纯胶子系统进行描述^[27]。在其基础上，根据全息字典，以额外加入 U(1)规范场的方式引进重子数流，即为 EMD 模型。下面是其作用量：

$$S = \frac{1}{2\kappa_N^2} \int d^5 x \sqrt{-g} \left[\mathcal{R} - \frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - \frac{Z(\phi)}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - V(\phi) \right], \quad (4.1)$$

这里我们采用 Einstein 框架^[28]， S 是五维的作用量，不考虑物质场，仅有引力背景。 g 表示度规 $g_{\mu\nu}$ 的行列式(后面均采用这种记法)。有效牛顿常数 $\kappa^2 = 8\pi G_5$ ， ϕ 为 dilaton(伸缩子)场， $V(\phi)$ 为 dilaton 的势函数。Maxwell 场 A_μ 引入了有限重子密度，而 $Z(\phi)$ 则作为规范动力学函数用于确定相结构对重子数的依赖。

我们将度规在 Poincaré 坐标下假设为：

$$ds^2 = -f(r)e^{-\eta(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 dx_3^2,$$

$$\phi = \phi(r), \quad A_t = A_t(r), \quad (4.2)$$

其中, $dx_3^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, r 为全息坐标, 当 $r \rightarrow \infty$ 时, 度规可以退为渐进 AdS。

4.2. 有限化学势的热力学

这一节我们将概述有限化学势下的热力学, 这些热力学量及其关系将成为评判一个全息模型准确性的重要标准。

考虑到我们的描述对象 QGP, 流体由广延量所表征, 包括熵 S 、体积 V 与粒子数 N 。其内能可写作广延量的依赖 $U(S, V, N)$, 第一定律为:

$$dU = TdS - pdV + \mu dN, \quad (4.3)$$

其中, 温度 T 、压强 p 、化学势 μ 是分别与广延量共轭的强度量。

将 (U, S, N) 分别转化为密度 $(\epsilon, s, n) = (U, S, N)/V$, 并利用热力学关系:

$$U = TS - pV + \mu N, \quad (4.4)$$

可以将式子写为仅依赖于两个变量 s 和 n 的形式:

$$d\epsilon = Tds + \mu dn. \quad (4.5)$$

利用 Legendre 变换, 定义出依赖于 T 与 μ 的自由能密度 Ω :

$$\Omega(T, \mu) \equiv \epsilon - sT - \mu n, \quad d\Omega = -sdT - nd\mu, \quad (4.6)$$

与公式比较, 可以发现:

$$p = -\Omega. \quad (4.7)$$

这样, 我们可以以 T, μ 为坐标来描述相图。相图上的点对应着将 Ω 取极值的各种广延量。考虑到相变的情况下, 同一个相图点可能对应多个 Ω 取值的情况, 由于热力学第二定律或整体稳定性, 我们取自由能 Ω 为最小值。

一般来说, 一阶相变对应着热力学势本身连续但其一阶导数不连续, 伴随着体积变化或热量吸收(潜热)^[29]。在 QCD 中则对应着两个相在某点处有相同的自由能, 以及 s 、 n 等密度的不连续。熵的不连续导致潜热。随着一阶相变向高温移动, 会到达 CEP 点, 这是一个二阶相变点, 意味着一阶导数连续但二阶导

数不连续，例如比热的发散。继续向高温移动，过 CEP 之后将是平滑但快速变化的行为，这即是 Crossover。

为了研究相变，接下来我们考虑相图局域的稳定性问题，它可以由以下的敏感度矩阵(susceptibilities matrix)来表示^[30]：

$$\bar{S} \equiv \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 \Omega}{\partial T^2} & -\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mu \partial T} \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial T \partial \mu} & -\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mu^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial T} & \frac{\partial s}{\partial \mu} \\ \frac{\partial n}{\partial T} & \frac{\partial n}{\partial \mu} \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

其中，为了和熵 S 相区别，这里用 \bar{S} 表示该矩阵。每一个偏导都要求另一个变量固定。

可以发现，这个矩阵的元素分别对应某种物理量：

$$C_\mu \equiv T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_\mu = -T \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial T^2} \right)_\mu, \quad \kappa_T \equiv \frac{1}{n^2} \left(\frac{\partial n}{\partial \mu} \right)_T, \quad (4.9)$$

C_μ 为恒定化学势下的比热，对应 \bar{S} 矩阵左上角元素， κ_T 为恒温压缩率，对应 \bar{S} 矩阵右下角。

我们用恒体积的比热 C_n 代替恒化学势比热 C_μ ，用夸克极化率 χ_2 (quark susceptibility)代替 κ_T ：

$$C_n \equiv T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_n = -T \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial T^2} - \frac{(\partial^2 \Omega / \partial T \partial \mu)^2}{(\partial^2 \Omega / \partial \mu^2)} \right], \chi_2 \equiv \left(\frac{\partial n}{\partial \mu} \right)_T = n^2 \kappa_T. \quad (4.10)$$

这步替换的目的，一是可以将 κ_T 换为 QCD 中常用的 χ_2 ，二是可以方便的写出 \bar{S} 的行列式：

$$\det \bar{S} = \frac{1}{T} \chi_2 C_n, \quad (4.11)$$

此时对于局域稳定，即 \bar{S} 矩阵的正定，定价于要求：

$$C_n > 0, \quad \chi_2 > 0. \quad (4.12)$$

4.3. 运动方程

由(4.1)式对 dilaton 场 ϕ 、规范场 A^μ 与度规 $g^{\mu\nu}$ 分别变分得到相应的运动方程 EOM (Equations of motion)为:

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi - \frac{\partial_\phi Z}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \partial_\phi V = 0, \quad (4.13)$$

$$\nabla^\nu (Z F_{\nu\mu}) = 0, \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathcal{R} g_{\mu\nu} = & \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{Z}{2} F_{\mu\rho} F_\nu{}^\rho \\ & + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - \frac{Z}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - V \right) g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

其中, (4.15)式包含 5 个分量方程。

将度规以及一些假定(4.2)带入上述 EOM 中, 便可得到如下相互独立的运动方程:

$$\begin{aligned} \phi'' + \left(\frac{f'}{f} - \frac{\eta'}{2} + \frac{3}{r} \right) \phi' + \frac{\partial_\phi Z}{2f} e^\eta A_t'^2 - \frac{1}{f} \partial_\phi V = 0, \\ \partial_r (e^{\eta/2} r^3 Z A_t') = 0, \\ \frac{\eta'}{r} + \frac{1}{3} \phi'^2 = 0, \\ \frac{2f'}{r} - \frac{\eta'}{r} + \frac{Z}{3f} e^\eta A_t'^2 + \frac{2}{3f} V + \frac{4}{r^2} = 0, \end{aligned} \quad (4.16)$$

其中的求导均对全息坐标 r 。

势函数与规范动力函数作为模型中的现象学项, 我们受到 Gubser 等人^[30, 31, 32]的启发构造函数形式, 并通过 LQCD (格点 QCD) 的数据^[33, 34, 35]固定其中自由度, 最终得到:

$$\begin{aligned} V(\phi) = & -12 \cosh[c_1 \phi] + (6c_1^2 - \frac{3}{2})\phi^2 + c_2 \phi^6, \\ Z(\phi) = & \frac{1}{1+c_3} \operatorname{sech}[c_4 \phi^3] + \frac{c_3}{1+c_3} e^{-c_5 \phi}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

其中, c_{1-5} 作为模型参数, 由 LQCD 数据来确定, 分别等于 0.7100、0.0037、1.935、0.085、30。

需要声明的是, 在模型中, 我们取 AdS 半径 $L = 1$, 宇宙学常数 $\Lambda = -6$ 以

及标量算符的共形维数为 $\Delta_+ = 3$ 。由(3.11)与(3.12)式可以得到:

$$\Delta_- = 1, \quad m^2 = -3, \quad (4.18)$$

$$\phi(r) = \frac{\phi_s}{r} + \frac{\phi_v}{r^3} + \dots, \quad (4.19)$$

其中考虑到 ϕ 仅依赖于 r , 这里作替换 $\alpha(\vec{x}, t) \rightarrow \phi_s, \beta(\vec{x}, t) \rightarrow \phi_v$ 。

回到(4.17)式, 当在边界处, 即 $r \rightarrow \infty$ 。根据(4.19)式, 易得 $\phi \rightarrow 0$, 规范动力学函数和势函数在边界处近似为:

$$\begin{aligned} Z(\phi) &= 1 + \mathcal{O}(\phi), \\ V(\phi) &= 2\Lambda + \frac{1}{2}m^2\phi^2 = -12 - \frac{3}{2}\phi^2 + \mathcal{O}(\phi^4), \end{aligned} \quad (4.20)$$

为了得到渐进 AdS 度规中函数以及伸缩场与规范场的数值解, 需要在事件视界处(后面也称“红外(IR)”处)给出约束条件。将 f 函数为 0 处设置为事件视界的位置 r_h , 再对各个函数作 $(r - r_h)$ 的泰勒展开如下:

$$\begin{aligned} f &= f_h(r - r_h) + \dots, \\ \eta &= \eta_h^0 + \eta_h^1(r - r_h) + \dots, \\ A_t &= a_h(r - r_h) + \dots, \\ \phi &= \phi_h^0 + \phi_h^1(r - r_h) + \dots, \end{aligned} \quad (4.21)$$

由于 r_h 的定义, 以及正规化条件, 即在 r_h 与边界间不再有 f 的零点, 我们要求 $f_h^0 = 0$ 。为了让 $A_t dt$ 在视界处有良好定义, 我们同样要求 $a_h^0 = 0$ 。

为了方便计算和求解, 我们做如下的变换:

$$\begin{aligned} r \rightarrow \frac{1}{z}, \quad \phi(r) &\rightarrow z\Phi(z), \quad f(r) \rightarrow F(z)/z^2, \\ \eta(r) &\rightarrow \eta(z), \quad A_t(r) \rightarrow A(z). \end{aligned} \quad (4.22)$$

将展开(4.21)代入 EOM(4.16)逐阶求解可以得到各阶系数, 最后发现余下 4 个独立自由度 $(r_h, a_h, \eta_h^0, \phi_h^0)$ 。其中, 通过伸缩对称性, 可以设置 $r_h = 1, \eta_h^0 = 0$, 关于伸缩对称性的内容将在后面进行介绍。至此, 当确定下 (a_h, ϕ_h^0) 后便可以得到事件视界处约束条件的具体数值。

通过最高到二阶的微分方程(4.16)以及视界处的约束条件, 可数值求解微分方程组。具体的数值求解过程可以通过 Mathematica 的 NDSolve 函数实现, 其

中的约束条件我们选择(4.21)中的四个函数以及 ϕ' 与 A_t' 函数在 IR 的取值。

为了得到边界场论的信息，需要上述数值求解得到的函数与全息字典相对应。这要求我们同样需要在边界处(后面也称“紫外(UV)”处)做函数展开，代入 EOM 逐阶求解后得到^[36]：

$$\begin{aligned}
\phi(r) &= \frac{\phi_s}{r} + \frac{\phi_v}{r^3} - \frac{\ln(r)}{6r^3} (1 - 6c_1^4) \phi_s^3 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln(r)}{r^5}\right), \\
A_t(r) &= \mu_B - \frac{2\kappa_N^2 n_B}{2r^2} - \frac{2\kappa_N^2 n_B c_3 c_5 \phi_s}{3(1+c_3)r^3} \\
&\quad + \frac{2\kappa_N^2 n_B \phi_s^2 ((1+c_3)^2 - 6(-1+c_3)c_3 c_5^2)}{48(1+c_3)^2 r^4} \\
&\quad + \frac{2\kappa_N^2 n_B c_3 c_5 (-10c_5^2 (1+(-4+c_3)c_3)) \phi_s^3}{300(1+c_3)^3 r^5} \\
&\quad + \frac{2\kappa_N^2 n_B c_3 c_5 ((7-12c_1^4) \phi_s^3 - 60\phi_v)}{300(1+c_3)r^5} \\
&\quad - \frac{2\kappa_N^2 n_B c_3 c_5 \phi_s^3 (-1+6c_1^4) \ln(r)}{30(1+c_3)r^5} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln(r)}{r^6}\right), \\
\eta(r) &= \eta_0 + \frac{\phi_s^2}{6r^2} + \frac{(1-6c_1^4)\phi_s^4 + 72\phi_s\phi_v}{144r^4} \\
&\quad - \frac{\ln(r)}{12r^4} (1-6c_1^4)\phi_s^4 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln(r)^2}{r^6}\right), \\
f(r) &= r^2 \left[1 + \frac{\phi_s^2}{6r^2} + \frac{f_v}{r^4} - \frac{\ln(r)}{12r^4} (1-6c_1^4)\phi_s^4 \right] \\
&\quad + \mathcal{O}\left(\frac{\ln(r)^2}{r^4}\right). \tag{4.23}
\end{aligned}$$

由于是基于全息字典进行展开，所有未定自由度都与场论方面相关。其中最典型的就 ϕ_s 项作为外源，打破了共形对称性。同时由于与 r 的伸缩变换关系，可以起到能标的作用。

4.4. 全息重整化

在之前的相图研究^[37, 38, 39]中, 热力学的获取一般是通过对热力学第一定律的积分, 这往往会增加模型的参数。这里我们将采用全息重整化的途径。

根据 Skenderis K. 与 de Haro S 等人的文章^{[40][41]}, 对于(4.1)在边界处的发散行为, 我们需要在作用量上额外添加一些边界项, 包括 Gibbons-Hawking 项^[42]与用于消除发散的抵消项。

以 Einstein-Hilbert 作用量为例, 当我们对作用量变分时, 如果考虑边界以及度规的一阶导数, 最终会得到如下的形式:

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int_M \sqrt{-g} (R - 2\Lambda),$$

$$\delta S \sim \int_M \sqrt{-g} G^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \int_{\partial M} [A(g, \partial g) \delta g + B(g, \partial g) \delta \partial g], \quad (4.24)$$

为了有定义良好的变分, 要求 $\delta g = 0$ 时, $\delta S = 0$ 。从上面式子明显可以看到 $\delta \partial g$ 项会带来困难, 于是我们可以在边界处加上 Gibbons-Hawking 项来保证良好变分, 同时需要一些发散的抵消项, 最后结果如下:

$$S = S_{EH} + S_{GH} + S_{counter}$$

$$= \frac{1}{16\pi} \int_M \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + \frac{1}{8\pi} \int_{\partial M} \sqrt{-h} K + \frac{1}{8\pi} \int_{\partial M} \sqrt{-h} (...), \quad (4.25)$$

其中, h 为 g 在边界 ∂M 的诱导度规, K 为边界外曲率的迹 $h^{ij} K_{ij}$ 。

此时对 S 做变分可以得到:

$$\delta S \sim \int_M \sqrt{-g} G^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \int_{\partial M} \sqrt{-h} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \quad (4.26)$$

代入运动方程, 即 on-shell 情况下,

$$\delta S_{on-shell} = \frac{1}{2} \int_{\partial M} \sqrt{-h} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \quad (4.27)$$

从而得到,

$$T_{ij} = \frac{2}{\sqrt{-h}} \frac{\delta S_{on-shell}}{\delta h^{ij}}, \quad (4.28)$$

T_{ij} 称为 Brown-York 能动张量, 他的分量即对应着场论的热力学量。

接下来考虑 EMD 模型的(4.1)作用量。为了方便计算，我们先定义如下拉氏量：

$$S = \frac{1}{2\kappa_N^2} \int_{\partial M} \mathcal{L}_{bulk}, \quad \mathcal{L}_{bulk} = \mathcal{L}_d + \mathcal{L}_c, \quad (4.29)$$

其中， \mathcal{L}_d 表示发散(divergent)项， \mathcal{L}_c 为收敛(convergence)项。

将(4.23)的 UV 展开代入(4.1)，可得：

$$\mathcal{L}_d = -2r^4 - \frac{r^2\phi_s^2}{6} + \frac{1}{12}(1 - 6c_1^4)\phi_s^4 \ln(r), \quad (4.30)$$

易知在边界 $r \rightarrow \infty$ 处， \mathcal{L}_d 中各项均发散。

边界度规 γ_{ij} 为：

$$\begin{pmatrix} -e^{-\eta(r)}f(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}. \quad (4.31)$$

将包含 Gibbons-Hawking 项在内的抵消项(counter term)拉氏量记为 \mathcal{L}_{ct} ，以下给出部分可能的抵消项的发散情况：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ct-K} &= \sqrt{-h}K \sim 4r^4 + \frac{r^2\phi_s^2}{3} - \frac{1}{6}(1 - 6c_1^4)\phi_s^4 \ln(r) + \mathcal{O}(1), \\ \mathcal{L}_{ct-\Lambda} &= \sqrt{-h}\Lambda \sim -6r^4 + \mathcal{O}(1), \\ \mathcal{L}_{ct-\phi^2} &= \sqrt{-h}\phi^2 \sim r^2\phi_s^2 - \frac{1}{3}(1 - 6c_1^4)\phi_s^4 \ln(r) + \mathcal{O}(1), \\ \mathcal{L}_{ct-\phi^4} &= \sqrt{-h}\phi^4 \sim \phi_s^4 + \mathcal{O}(r^{-1}), \end{aligned} \quad (4.32)$$

与(4.30)的发散项比较后，选择最小减除方案，可以得到最终的边界抵消作用量如下：

$$S_\partial = \frac{1}{2\kappa_N^2} \int_{\partial} dx^4 \sqrt{-h} \left[2K - 6 - \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1 - 6c_1^4}{12}\phi^4 \ln(r) - b\phi^4 \right], \quad (4.33)$$

其中的参数 b 与反常相关，后面会提到。

边界上的 Brown-York 能动张量为：

$$T_{ij} = \frac{2}{\sqrt{-h}} \frac{\delta(S + S_\partial)_{on-shell}}{\delta h^{ij}}$$

$$= \frac{1}{2\kappa_N^2} \left[2(Kh_{ij} - K_{ij} - 3h_{ij}) - \left(\frac{1}{2}\phi^2 - \frac{1-6c_1^4}{12}\phi^4 \ln(r) + b\phi^4 \right) h_{ij} \right], \quad (4.34)$$

将展开(4.23)代入，便可得能量密度与压强：

$$\begin{aligned} \epsilon &:= T_{tt} = \frac{1}{2\kappa_N^2} \left(-3f_v + \phi_s \phi_v + \frac{1+48b}{48} \phi_s^4 \right) \\ P &:= T_{xx} = T_{yy} = T_{zz} = \frac{1}{2\kappa_N^2} \left(-f_v + \phi_s \phi_v + \frac{3-48b-8c_1^4}{48} \phi_s^4 \right), \end{aligned} \quad (4.35)$$

计算能动张量的迹，得到迹反常 θ ：

$$\theta = \epsilon - 3P = -\frac{1}{2\kappa_N^2} \left(2\phi_s \phi_v + \frac{1-24b-3c_1^4}{6} \phi_s^4 \right). \quad (4.36)$$

此外，我们可以通过温度 T 乘上欧式化的重整化作用量来计算自由能：

$$-\Omega V = T(S + S_\partial)_{on-shell}, \quad (4.37)$$

其中，Minkowski 与 Euclidean 之间差一个负号。 $V = \int dx dy dz$, $t \in [0, 1/T]$ 。

利用 EOM(4.16)以及展开(4.23)，可得：

$$\begin{aligned} \Omega &= \lim_{r \rightarrow \infty} [2e^{-\eta/2} r^2 f - e^{-\eta/2} r^3 \sqrt{f} (2K - 6 \\ &\quad - \frac{1}{2}\phi^2 - \frac{6c_1^4 - 1}{12}\phi^4 \ln(r) - b\phi^4)] \\ &= \frac{1}{2\kappa_N^2} \left(f_v - \phi_s \phi_v - \frac{3-48b-8c_1^4}{48} \phi_s^4 \right), \end{aligned} \quad (4.38)$$

由(4.35)可以发现，自由能与压强的关系与 4.2 节热力学中的(4.7)式一致。

4.5. 黑洞解与状态方程

回顾 4.3 节运动方程与展开，我们在固定 (a_h, ϕ_h^0) 后，可以数值解得整个 bulk 体内的函数构型，接下来我们考虑如何从函数构型与展开(4.23)得到边界场论的热力学信息。

取黑洞处的 Hawking 温度 T 和依赖于视界面积的熵 S 如下：

$$T = \frac{\sqrt{-g'_{tt}g^{rr'}}}{4\pi} \Big|_{\tilde{r}=\tilde{r}_H} = \frac{1}{4\pi} f'(r_h) e^{-\eta(r_h)/2},$$

$$S = \frac{A_H}{4G_5 V} = \frac{2\pi}{\kappa_5^2} r_h^3, \quad (4.39)$$

易知固定 (a_h, ϕ_h^0) 后即可得到 T 与 S 的数值。

接下来考虑系统的守恒荷，由(4.16)式的第二个方程可以得到 U(1)规范场的守恒荷：

$$Q_G = A'_t Z r^3 e^{\eta/2}, \quad (4.40)$$

此外，通过运动方程可以构建出另一个更为有用的守恒荷^[43, 44]：

$$Q = \frac{1}{2\kappa_N^2} r^3 e^{\eta/2} \left[r^2 \left(\frac{f}{r^2} e^{-\eta} \right)' - Z A_t A_{t'} \right]. \quad (4.41)$$

这个守恒荷最大的意义在于其视界与边界的等同。在视界处，考虑(4.39)与 IR 展开(4.21)，可得：

$$Q = TS, \quad (4.42)$$

同样在 AdS 边界处，利用 UV 展开(4.23)可得：

$$Q = \epsilon + P - \mu_B n_B. \quad (4.43)$$

通过守恒荷，我们可以将两边等同，从而得到 4.2 小节中我们通过热力学得到的关系式(4.6)：

$$\Omega = \epsilon - Ts - \mu_B n_B = -P, \quad (4.44)$$

这也同时说明了我们在黑洞处得到温度与熵的合理性。

将数值解得的函数对 UV 展开进行拟合可以得到展开系数的取值，再通过上述的系数与边界热力学之间的关系便可以得到 QCD 状态方程(EOS)。

回顾数值解的过程，我们曾要求 $r_h = 1$, $\eta_h^0 = 0$ 。关于这一设定的可行性，我们需要简单介绍一下系统的标度(伸缩)对称性(Scaling Symmetry)。

和 2.3 节整体对称性中介绍的伸缩对称性类似，通过度规与运动方程可以得到两组独立的标度变换：

$$\begin{aligned}
t &\rightarrow \lambda_t t, & e^\eta &\rightarrow \lambda_t^2 e^\eta, & A_t &\rightarrow \lambda_t^{-1} A_t, \\
r &\rightarrow \lambda_r r, & f &\rightarrow \lambda_r^2 f, & A_t &\rightarrow \lambda_r A_t,
\end{aligned} \tag{4.45}$$

第一组 t 的标度变换可以保证 $\eta_h^0 = 0$ ，第二组 r 的变换则确定了 $r_h = 1$ 。

考虑到 UV 展开与一些热力学量，下面给出其相关的标度变换：

$$\begin{aligned}
T &\rightarrow \lambda_r \lambda_t^{-1} T, & S &\rightarrow \lambda_r^3 S, & \mu &\rightarrow \lambda_r \mu, & n &\rightarrow \lambda_r^3 n, \\
\phi_s &\rightarrow \lambda_r \phi_s, & \phi_v &\rightarrow \lambda_r^3 \left[\phi_v + \frac{1}{6} (1 - 6c_1^2) \phi_s^3 \ln(\lambda_r) \right], \\
f_v &\rightarrow \lambda_r^4 \left[\phi_v + \frac{1}{12} (1 - 6c_1^2) \phi_s^4 \ln(\lambda_r) \right].
\end{aligned} \tag{4.46}$$

要特殊强调的是，在数值解时，我们通过两组标度对称性设定了 $\eta_h^0 = 0$ ， $r_h = 1$ 。这仅仅是为了方便数值计算。其数值解不一定满足物理上的要求，所以在得到数值结果后仍需做一次标度变换得到物理黑洞解，即令 $\eta_0 = 0$ ， $\phi_s = 1085\text{MeV}$ 。其中， $\eta_0 = 0$ 是 AdS 边界的要求， $\phi_s = 1085\text{MeV}$ 则是替代 r 固定能标。

关于迹反常，除了模型中势函数之外还依赖于全息重整化过程中引入的自由度 b 。通过与格点数据的对比可以得到 $b = -0.27341$ 。类似地，还可以得到有效牛顿常数 $\kappa^2 = 2\pi(1.68)$ 。

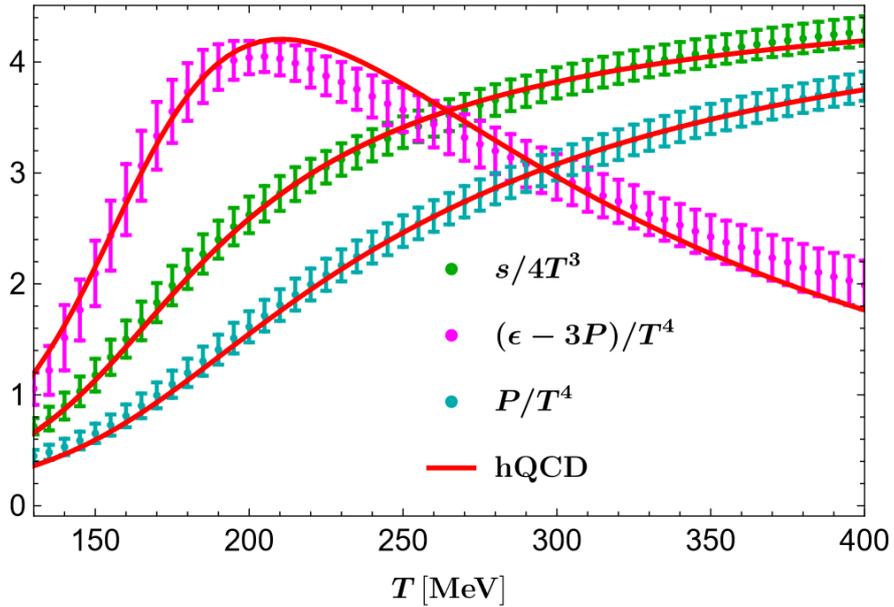


图 4. 1 零化学势下的状态方程与 LQCD 对比，红色实线为全息模型结果，绿、红、蓝色误差棒分别来源于熵、反常与压强的无量纲化后格点数据[34]

最终的零化学势下热力学量状态方程(EOS)如图 4.1 所示, 包含了熵 s , 迹反常与压强 P (图中均乘以 T 的负幂次以无量纲化)。红色曲线是全息模型给出的 EOS, 误差棒的数据来自于 HotQCD (A. Bazavov 等人)关于(2+1)味 QCD 的最新格点数据^[34]。

除此之外, 还可以计算一些输运系数, 例如声速与比热:

$$C_s^2 = (dP/d\epsilon)_{\mu_B}, \quad C_V = (d\epsilon/dT)_{\mu_B}. \quad (4.47)$$

结果如下图 4.2 所示。和零化学势下 EOS 同样, 红色代表全息模型结果, 误差棒来自 HotQCD 的格点数据^[34]。图中关于重子数极化率的部分将在下一节详述。

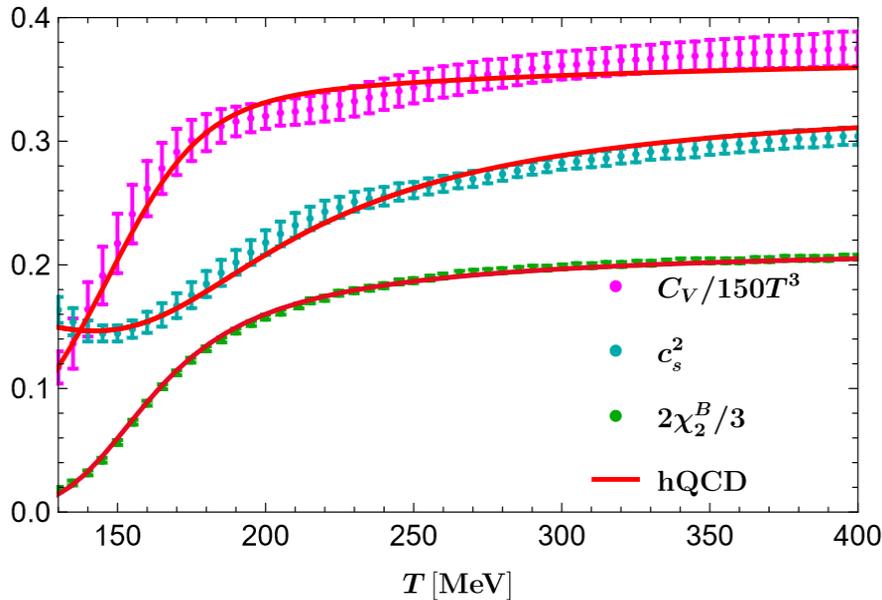


图 4. 2 零化学势下声速、比热与重子数极化率, 红色曲线为全息模型结果, 红、蓝、绿色误差棒分别来源于比热、声速平方与重子数极化率的无量纲化后格点数据[34, 35]

可以看到全息模型关于(2+1)味 QCD 状态方程的结果在零化学势下不仅能覆盖全部 LQCD 数据的温度区间, 还能在定量上与最新计算结果达到惊人的符合。

4.6. 极化率与有限密度

这一节将把全息模型推广至有限化学势下，主要将介绍如何通过重子数极化率确定规范动力学函数的自由度以及给出有限化学势下的状态方程结果。

由 4.2 节中的公式(4.10)可以发现，零化学势以及规范动力学函数未确定的条件下，我们难以对重子数极化率进行数值计算。所以需要通过守恒荷来构建其解析表达式。

根据(4.10)， n 为重子数密度，重新定义重子数极化率以无量纲化，在零化学势下：

$$\chi_2^B(\mu_B = 0) = \lim_{\mu_B \rightarrow 0} \frac{n}{T^2 \mu_B}, \quad (4.48)$$

考虑标度对称性(4.46)以及(4.39)可得：

$$\chi_2^B(\mu_B = 0) = \frac{(4\pi)^2}{2\kappa_N^2} \frac{n}{e^{\eta_0} \mu_B [f'(r_h)]^2}. \quad (4.49)$$

利用上节中的守恒荷 Q_G 在边界上的结果以及视界处 A_t 函数的性质(4.21)，可以得到：

$$\begin{aligned} Q_G|_{\partial M} &= n e^{\eta_0/2}, & n &= Q_G e^{-\eta_0/2} \\ \mu_B &= \int_{r_h}^{\infty} A_t' dr = Q_G \int_{r_h}^{\infty} Z^{-1} r^{-3} e^{-\eta/2} dr, \end{aligned} \quad (4.50)$$

将上式代入(4.49)并利用 T 与 S 化简得：

$$\chi_2^B = \frac{1}{16\pi^2} \frac{S}{T^3} \frac{1}{\int_{r_h}^{\infty} Z^{-1}(\phi) r^{-3} e^{-\eta/2} dr} [f'(r_h)], \quad (4.51)$$

这个式子可以直接在零化学势下计算。

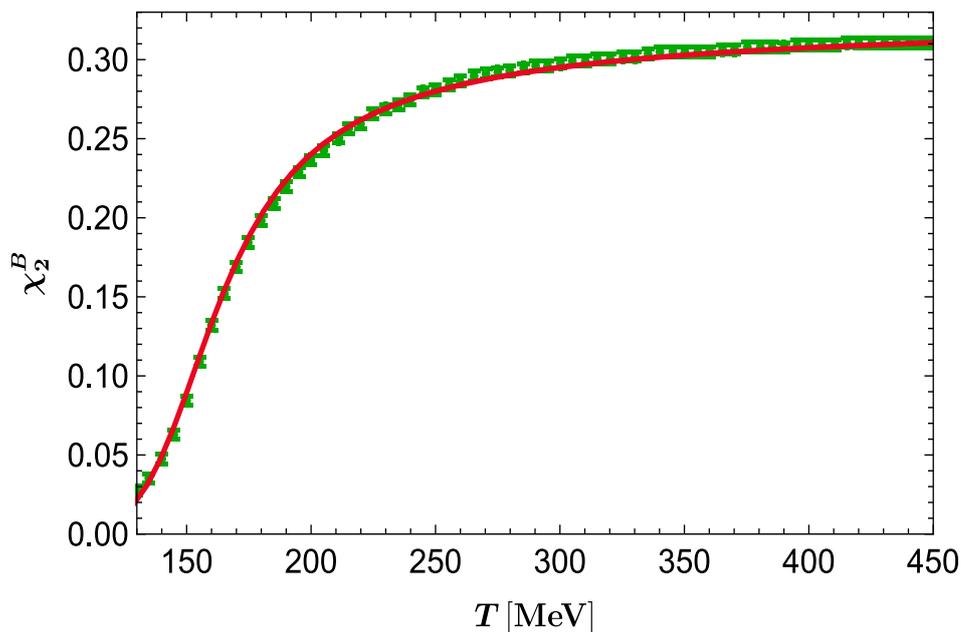


图 4. 3 零化学势下重子数极化率，红色曲线为全息模型结果，绿色误差棒来源于格点数据[35]

通过与 LQCD 数据^[35]比对从而确定规范动力学函数 Z 的自由度。其结果如图 4.2 以及上图 4.3 所示：

模型确定后，可以对有限密度、有限化学势下的状态方程 EOS 进行预测。

结果如图 4.4 所示，其中的连续曲线依然是全息模型给出的预测结果，误差棒来自于 S.Borsányi 等人通过泰勒展开与解析延拓得到的 LQCD 格点数据^[35]。如图中右侧标签所示，颜色从深蓝色(标签从上至下第一个)到浅黄色(标签最后一行)分别对应着化学势比温度 μ_B/T 从 0 取到 3.5 (间隔为 0.5)。

可以看到在格点数据区间，全息模型在 $\mu_B/T < 3.0$ 内很好的符合 LQCD 的延拓数据。并且根据 Karsch 的论述，格点延拓的结果在 $\mu_B/T < 3.0$ 内有很好的可靠性，这更说明了全息模型在有限化学势下的可靠性。

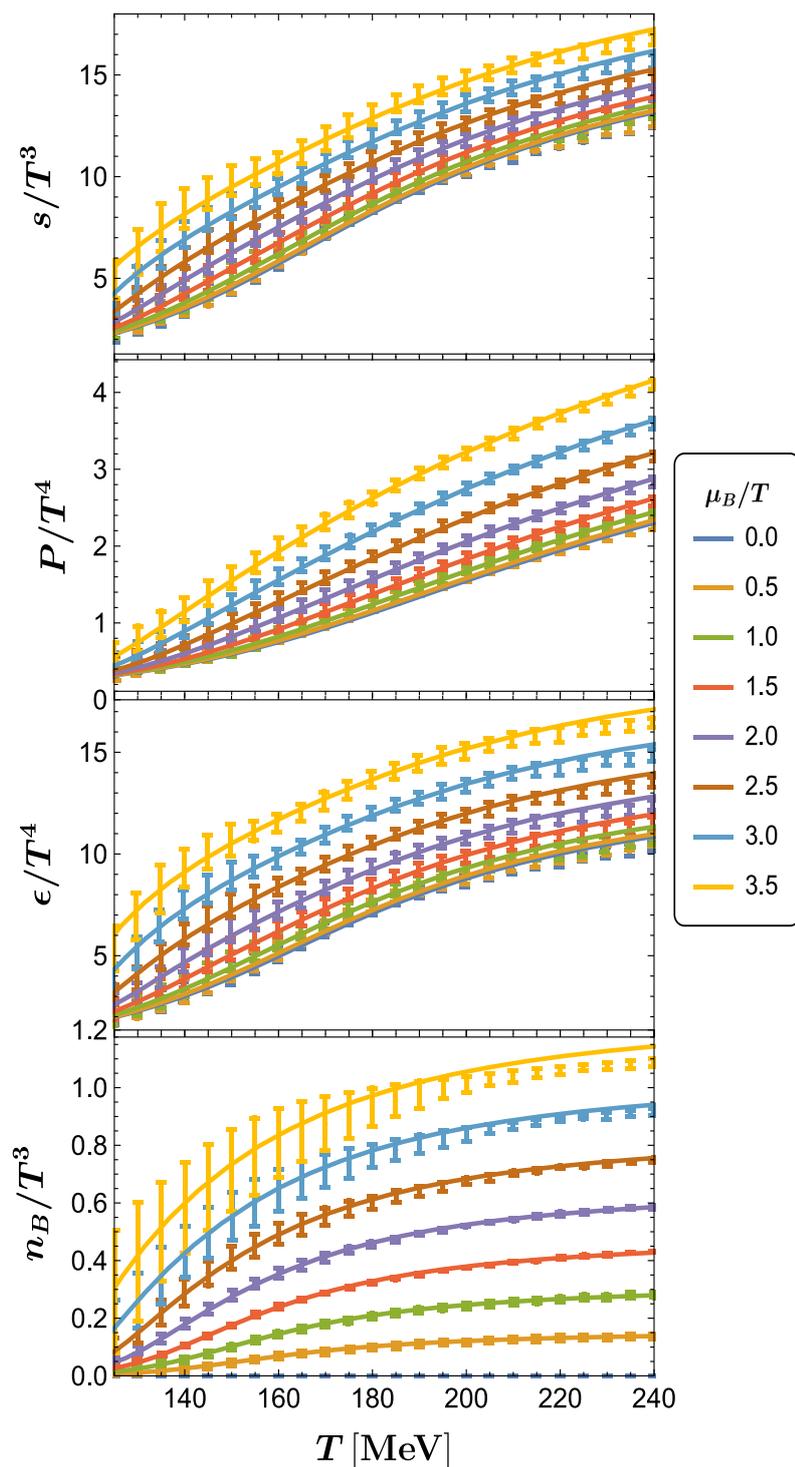


图 4. 4 有限化学势下的状态方程与 LQCD 对比，实线为全息结果，误差棒为格点数据[35]，从上至下分别是熵、压强、能量密度、重子数密度的状态方程，各图中从下至上、颜色从蓝至黄对应 μ_B/T 从 0 取到 3.5（间隔为 0.5）

4.7. CEP 与相图

根据 HotQCD 最近的工作^[45], CEP 点的位置很可能处在 $T_c \leq 135\text{MeV}$, $\mu_B/T > 2.5$ 的区间。显然上一节的预测是处在有限小化学势的范围, 远达不到相变的区域。这一节将考虑大化学势下的相变, 包括 CEP 点、一阶相变线以及 Crossover。

首先, 根据 4.2 节中(4.8)描述系统局域稳定性的矩阵 \bar{S} , 我们可以大致确定 CEP 与相变区域。

敏感度矩阵的 Jacobian 行列式为:

$$J \equiv \det \bar{S} = \partial(s, n) / \partial(T, \mu_B), \quad (4.52)$$

根据 \bar{S} 定义易知, 当 J 为负时, 对应热力学不稳定的情况。

由 4.5 节, 可以发现初始条件 (ϕ_h^0, a_h) 对应着某一个黑洞解, 进而对应到 $T - \mu_B$ 相图中的某个点。这使得 Jacobian 的计算可以由在 (T, μ_B) 下计算转换为在 (ϕ_h^0, a_h) 下计算。

对 (ϕ_h^0, a_h) 进行网格扫描, 并用 (i, j) 标记, 其中 i 标记网格中第 i 个 ϕ_h^0 , j 标记第 j 个 a_h 。做如下定义:

$$\begin{aligned} J_{ij}^{T\mu} &\equiv \det \begin{pmatrix} T_{i+1,j} - T_{i,j} & T_{i,j+1} - T_{i,j} \\ \mu_{i+1,j} - \mu_{i,j} & \mu_{i,j+1} - \mu_{i,j} \end{pmatrix}, \\ J_{ij}^{sn} &\equiv \det \begin{pmatrix} s_{i+1,j} - s_{i,j} & s_{i,j+1} - s_{i,j} \\ n_{i+1,j} - n_{i,j} & n_{i,j+1} - n_{i,j} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.53)$$

则 $J_{ij}^{sn} / J_{ij}^{T\mu}$ 就是第 (i, j) 点 Jacobian J_{ij} 的有限差分近似。

计算结果如下图 4.5 所示, 相图中每个点都可以对应到 (ϕ_h^0, a_h) 网格中, 颜色表示每个点 J 的正负。蓝色表示 J 为正, 即热力稳定。相对的, 红色则表示 J 为负, 即热力不稳定。可以看到 CEP 大致处于 $(T: 100 - 110\text{MeV}, \mu: 500 - 600\text{MeV})$, 而一阶相变与预期一致, 处于 CEP 右下角的窄线状区域。

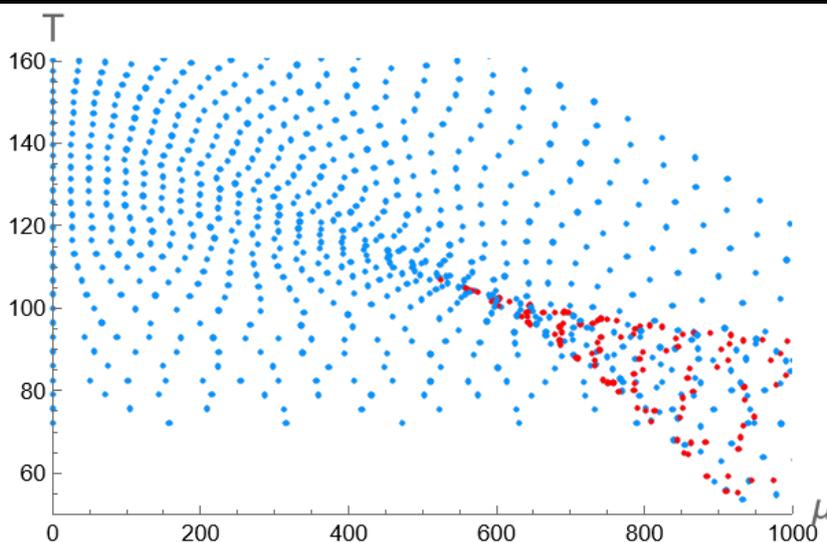


图 4. 5 数值解下相图的局域稳定性。蓝色表示热力稳定，红色表示热力不稳定

按照 4.2 节中对一阶相变与二阶相变的描述，下面将计算热力学量与比热在大化学势下的行为来获取更进一步的信息。

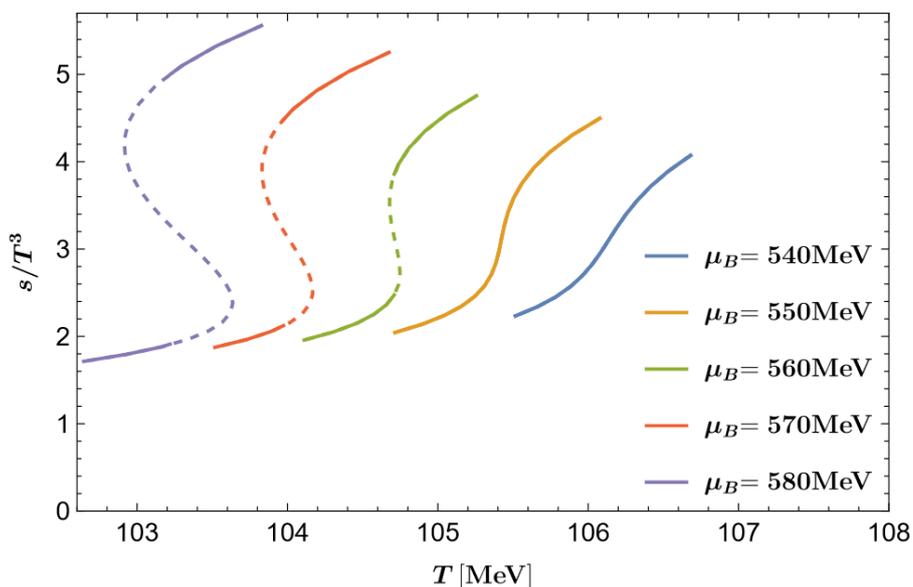


图 4. 6 不同化学势下熵随温度变化情况。实线部分表示热力稳定，虚线表示热力不稳定

上图 4.6 是大化学势下熵随温度的行为，可以看到当 $\mu_B \leq 550 \text{ MeV}$ 时，熵随温度是平滑的过渡，符合 Crossover 的描述。而当 μ_B 逐渐增大， $\mu_B \geq 560 \text{ MeV}$ 时会出现多值情况，这对应着一阶相变，其中实线是热力稳定，虚线表示热力不稳定。

类似地，我们给出大化学势下声速平方的结果。图 4.7 中从右到左的蓝、黄、绿、红色曲线分别是化学势 μ_B 为 0MeV、320MeV、440MeV、560MeV 的结果。虽然受到噪声影响，但仍可看到 $\mu_B = 560\text{MeV}$ 时，温度 $T = 105\text{MeV}$ 附近出现凹陷。这与局域稳定性给出的区间($T: 100 - 110\text{MeV}, \mu_B: 500 - 600\text{MeV}$)相符合。

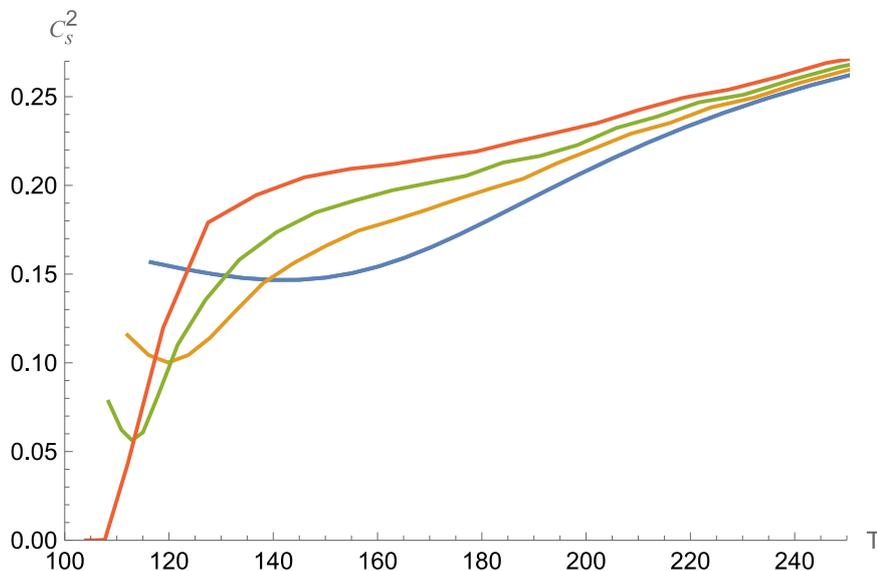


图 4.7 声速平方在不同化学势下行为。从右至左，从蓝色至红色分别对应 μ_B 为 0MeV、320MeV、440MeV、560MeV

考虑到声速可以作为夸克胶子等离子体 QGP 与强子气体自由度急剧变化的探针。我们可以将声速平方的最低值作为 Crossover 的一个表征，从图 4.7 也可以看到最低值会逐渐到达 CEP 点。

接下来我们通过自由能精确确定 CEP 点以及一阶相变线的位置。其中，自由能 Ω 由(4.38)给出。

下图 4.8 所示是大化学势下的自由能行为。同熵类似，在 $\mu_B \leq 550\text{MeV}$ 时，自由能随温度是 Crossover 的平滑过渡。 $\mu_B \geq 560\text{MeV}$ 时会出现多值情况。不同于熵的“S”型多值现象，自由能是燕尾型。最低值即实线对应着热力稳定，虚线表示热力不稳定。燕尾图的交点，即两条实线不“平滑”的相交处，对应着一阶相变点。将重子数化学势 μ_B 的取值精度提高便可以发现在某一化学势处，燕尾图消失，原交点处一阶导连续而二阶导不连续，这正是二阶相变点，即 CEP 点。

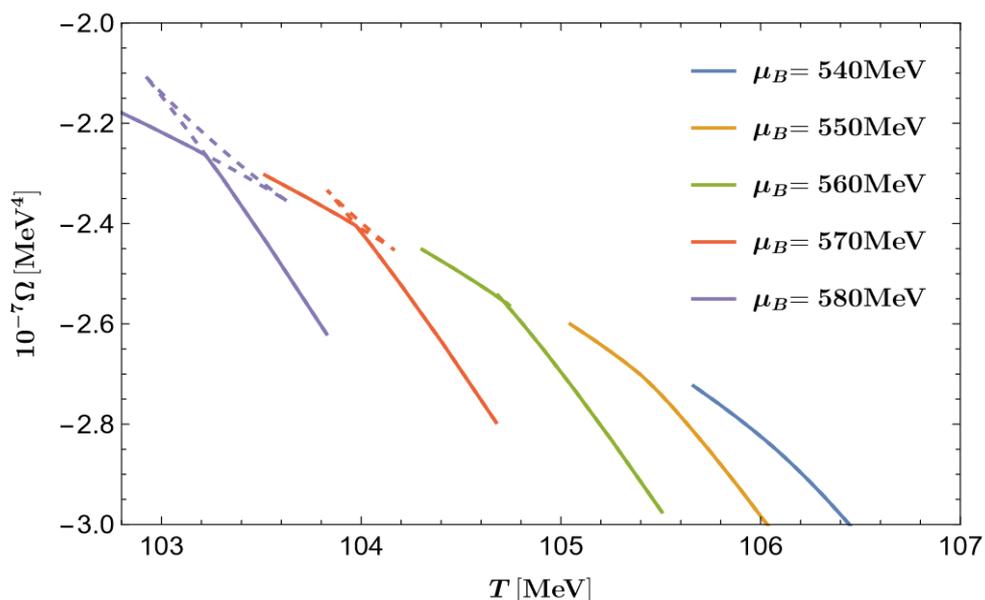


图 4. 8 自由能在不同化学势下行为，曲线从右至左分别是 μ_B 从 540MeV 至 580MeV (间隔为 10MeV)

综上，全息模型的完整 QCD 相图如下图 4.9 所示：

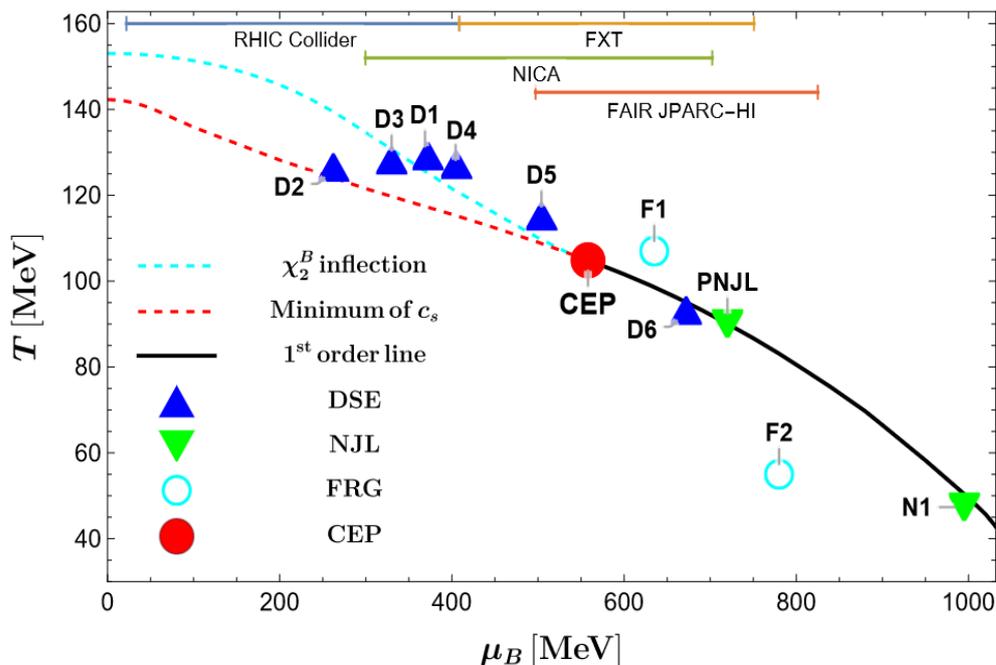


图 4. 9 全息模型预测的 QCD 相图，红色圆点为 CEP 点，右侧黑色实线为一阶相变线

图中左侧的红色与蓝色虚线表示声速平方的最低值与重子数极化率的斜率最大点(通过(4.51)延拓得到有限化学势下的结果),可以一定程度上来表征 Crossover 区。

红色的大圆点是 CEP 点,位于($T_c \sim 105\text{MeV}$, $\mu_c \sim 555\text{MeV}$)。其右下方的黑色实线是通过自由能得到的一阶相变线。

此外,图中还显示了其它有效模型所给出的 CEP 预测:深蓝色正三角形表示 Dyson-Schwinger equation (DSE)的结果^{[46][47][48][49]},其中 D1^[50]与 D6^[51]为最新结果;绿色倒三角表示 Nambu-Jona-Lasinio (NJL),包含 NJL1^[52]与 PNJL^[53];蓝色圆圈表示 Functional Renormalization Group (FRG),含有 F1^[54]与 F2^[55]。一个有趣现象是,这些模型的 CEP 点分布在全息模型所预言的 Crossover 与一阶相变线附近。

图的顶部为各实验组的覆盖范围,包括 RHIC^[56](Relativistic Heavy Ion Collider)及其 FXT (STAR fixed target program)计划,以及未来的 NICA^[57](Nuclotron-based Ion Collider fAcility)、FAIR^{[58][59]}(Facility for Antiproton and Ion Research)与 JPARC-HI^[60](Japan Proton Accelerator Research Complex - Hadron Experimental Facility)。模型预测的 CEP 点正好位于 FXT、NICA 与 JPARC-HI 的范围内。

第五章 夸克凝聚与相变引力波

前一章对全息模型进行了详细介绍。计算结果不仅符合现有的零化学势热力学，并且可以对 QCD 相图进行可靠描述。

本章将基于全息模型及其描述的 QCD 相结构对夸克胶子凝聚以及一阶相变诱导引力波进行进一步的研究探索。

5.1. 夸克胶子凝聚

根据 Karch 等人的研究^[61]，可以通过加入“探针(probe)”的形式来研究凝聚，即在原有的作用量(4.1)中添加一个夸克部分作用量。与一般在引力背景中加入物质场不同，这里新加入的作用量将不再引起引力背景的变化，此即所谓的“探针(probe)”。

由于全息模型描述的是(2+1)味 QCD，我们考虑 u 、 d 、 s 夸克的质量间关系为 $m_u = m_d < m_s$ ，新引入的作用量为：

$$S_{X_q} = \frac{1}{2\kappa_N^2} \int d^5x \sqrt{-g} Z_q(\phi) \left[-\frac{1}{2} \nabla_\mu X_q \nabla^\mu X_q - V(X_q) \right], \quad (5.1)$$

X_q 为 bulk 中的标量场，对偶于边界场论的 $\bar{\psi}_q \psi_q$ 算符，共形维度 $\Delta_c = 3$ 。 q 表示夸克， $q = l$ 是表示 u 、 d 轻夸克， $q = s$ 表示 s 夸克。 $V(X_q)$ 与 $Z_q(\phi)$ 分别为势函数与耦合常数。

对 X_q 变分得到运动方程 EOM：

$$X_q'' + \left(\frac{f'}{f} - \frac{\eta'}{2} + \frac{3}{r} \right) X_q' + \frac{\partial_\phi Z_q X_q' \phi'}{Z_q} - \frac{1}{f} \partial_{X_q} V = 0. \quad (5.2)$$

与引力背景中的模型参数一样， $V(X_q)$ 与 $Z_q(\phi)$ 也由格点数据进行固定，结果如下：

$$Z_q(\phi) = a_1 e^{a_q \phi^2}, \quad V(X_q) = -\frac{3}{2} X_q^2 + a_0 X_q^4, \quad (5.3)$$

由于轻重夸克差异较大, $Z_q(\phi)$ 分为 $Z_{q=l}(\phi)$ 与 $Z_{q=s}(\phi)$ 两部分。参数 $a_0 = 30$, $a_1 = 3$, $a_{q=l} = 0.595$, $a_{q=s} = 1.23$ 。

根据 3.4 节全息字典的介绍, 我们可以给出 X_q 在边界 UV 处的展开为:

$$X_q(r) = \frac{m_q}{r} + \dots + \frac{\sigma_q}{r^3} + \dots, \quad (5.4)$$

外源项为夸克质量, 由于描述的是 (2+1) 味系统以及考虑到夸克的物理质量, 这里分别取 $m_l = 4.5 \text{ MeV}$ 、 $m_s = 90 \text{ MeV}$, 质量比 $m_s/m_l = 20$ 。

同引力背景作用量(4.1)一样, S_{X_q} 在边界处存在发散, 需要进行全息重整化 $S_{X_q}^{ren} \equiv S_{X_q} + S_{X_q,\partial}$, 其边界抵消项如下:

$$S_{X_q,\partial} = \frac{1}{2\kappa_N^2} \int_{r \rightarrow \infty} d x^4 \sqrt{-h} \left[-\frac{1}{2} a_1 X_q^2 + a_1 a_0 X_q^4 \ln r + \frac{a_1(1-6a_q)}{6} X_q^2 \phi^2 \ln r \right], \quad (5.5)$$

根据全息字典, 可以得到手征凝聚为:

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle_{q,T} = \frac{\delta S_{X_q}^{ren}}{\delta m_q} = \frac{a_1}{2\kappa_N^2} \left[2\sigma_q + 2a_0 m_q^3 + \frac{1}{4} m_q \phi_s^2 \right], \quad (5.6)$$

考虑到 HotQCD^{[34][62]} 中对手征凝聚的归一化:

$$\Delta_q^R = \hat{d} + 2m_s r_1^4 [\langle \bar{\psi} \psi \rangle_{q,T} - \langle \bar{\psi} \psi \rangle_{q,0}], \quad (5.7)$$

其中 $\hat{d} = 0.0232244$, $r_1 = 0.3106 \text{ fm}$ 。 $\langle \bar{\psi} \psi \rangle_{q,0}$ 有两种途径来获得, 一方面由于 $\langle \bar{\psi} \psi \rangle_{q,T}$ 在低温下的性质, 可以取低温下的数值作为 $\langle \bar{\psi} \psi \rangle_{q,0}$; 另一方面也可以通过将其视为拟合格点数据的参数来确定。最后发现两种途径下可以得到一致的 $\langle \bar{\psi} \psi \rangle_{q,0}$ 。这一定程度上说明了取值的合理性。

最终结果如下图 5.1 所示, 红色实线为全息模型的结果, 误差棒来自于 HotQCD 的格点数据^[34]。其中绿色圆圈、蓝色三角与粉色菱形分别对应虚时网格数 $N_\tau = 8, 10, 12$ 下的格点计算数据。可以看到实线与误差棒在格点数据的温度区间内相符合。

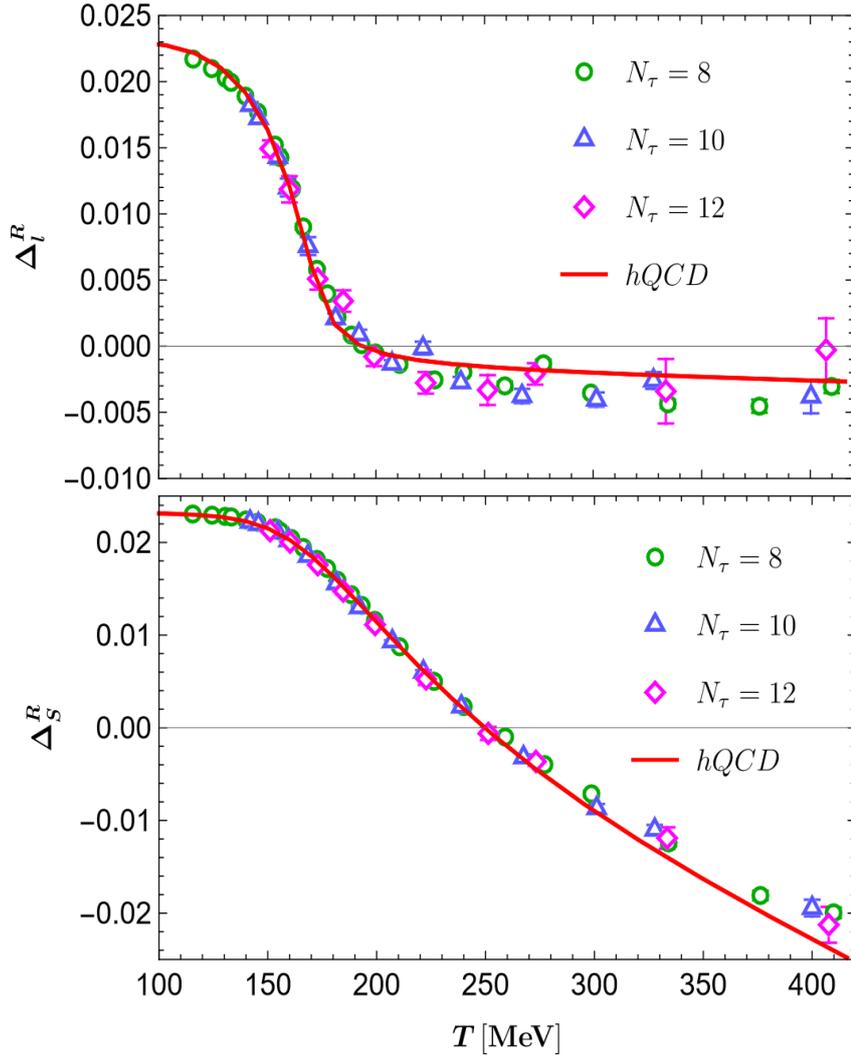


图 5. 1 轻(上)、重夸克(下)手征凝聚随温度行为, 红色为全息结果, 误差棒来自格点数据[34]

依照 Gubler P 等人^[63]的工作, 我们可以将手征凝聚做如下转换:

$$\frac{\langle \bar{l}l \rangle_T}{\langle 0 | \bar{l}l | 0 \rangle} = 1 - \frac{\hat{d} - \Delta_l^R(T)}{\hat{d} - \Delta_l^R(\infty)},$$

$$\frac{\langle \bar{s}s \rangle_T}{\langle 0 | \bar{s}s | 0 \rangle} = 1 + \frac{\hat{d} - \Delta_s^R(T)}{2m_s r_1^4 \langle 0 | \bar{s}s | 0 \rangle}, \quad (5.8)$$

(2+1) 味 QCD 下^[63], 有 $\langle \bar{l}l \rangle_0 \equiv \langle 0 | \bar{l}l | 0 \rangle = -[272(5)\text{MeV}]^3$ 、 $\langle \bar{s}s \rangle_0 \equiv \langle 0 | \bar{s}s | 0 \rangle = -[296(11)\text{MeV}]^3$ 。按照 HotQCD 的方法, 取 $\Delta_l^R(\infty) \approx \Delta_l^R(300\text{MeV}) = -0.002$ 。

为了区别于(5.7)的手征凝聚 Δ_q^R , 我们称 $\langle \bar{q}q \rangle_T$ 为夸克凝聚。

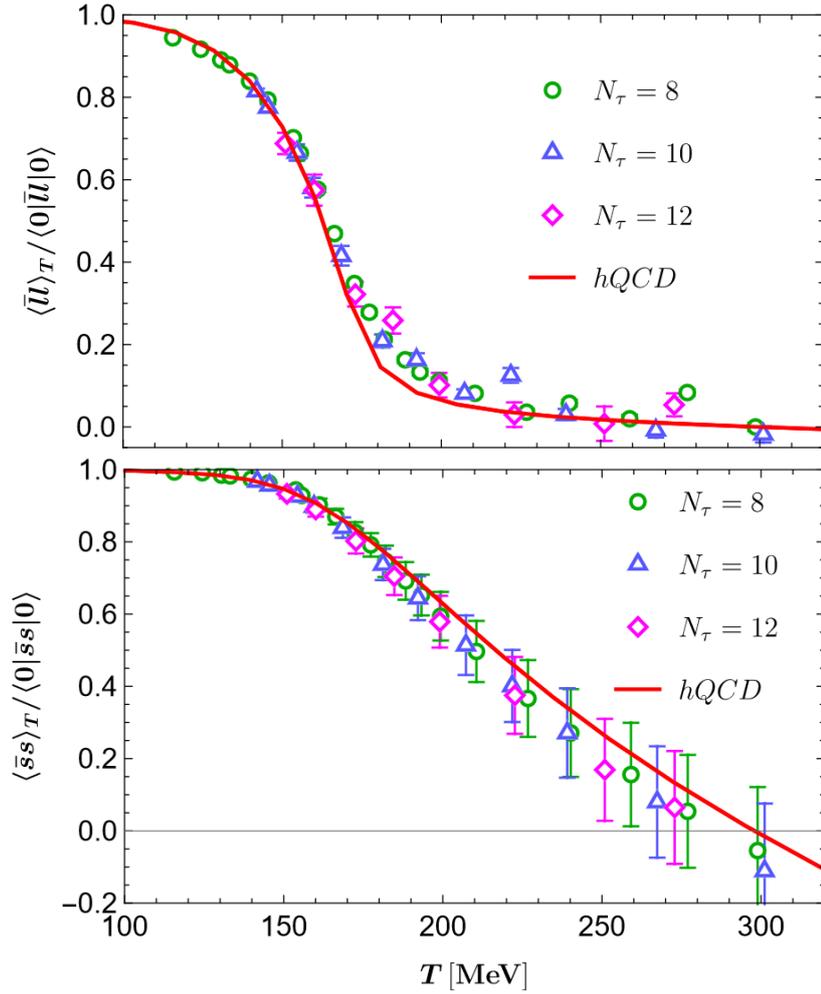


图 5. 2 夸克凝聚随温度行为，红色为全息结果，误差棒来自格点数据[34]

结果如上图 5.2 所示。和手征凝聚一样，红色实线为全息结果，不同类型的误差棒表示不同虚时间 τ 网格下的格点结果。全息模型再一次与 LQCD 计算结论定量的相符。

计算夸克凝聚的优势在于可以通过 QCD 的迹反常得到胶子凝聚。通过 4.5 节中的反常结果得到胶子凝聚如下^{[64][65]}：

$$\delta \left\langle \frac{\beta(g)}{2g} G^2 \right\rangle_T = \theta(T) - \hat{m}_u \delta \langle \bar{u}u \rangle_T - \hat{m}_d \delta \langle \bar{d}d \rangle_T - \hat{m}_s \delta \langle \bar{s}s \rangle_T, \quad (5.9)$$

其中， $\delta f(T) = f(T) - f(0)$ 。设定 $\mu/\Lambda_{\text{QCD}} = T/\text{MeV}$ ，并由 4 圈下的 β 函数与跑动夸克质量^{[66][67][68]}，可以得到胶子凝聚如下图 5.3 所示(4 圈下的细节请参考附录 A)：

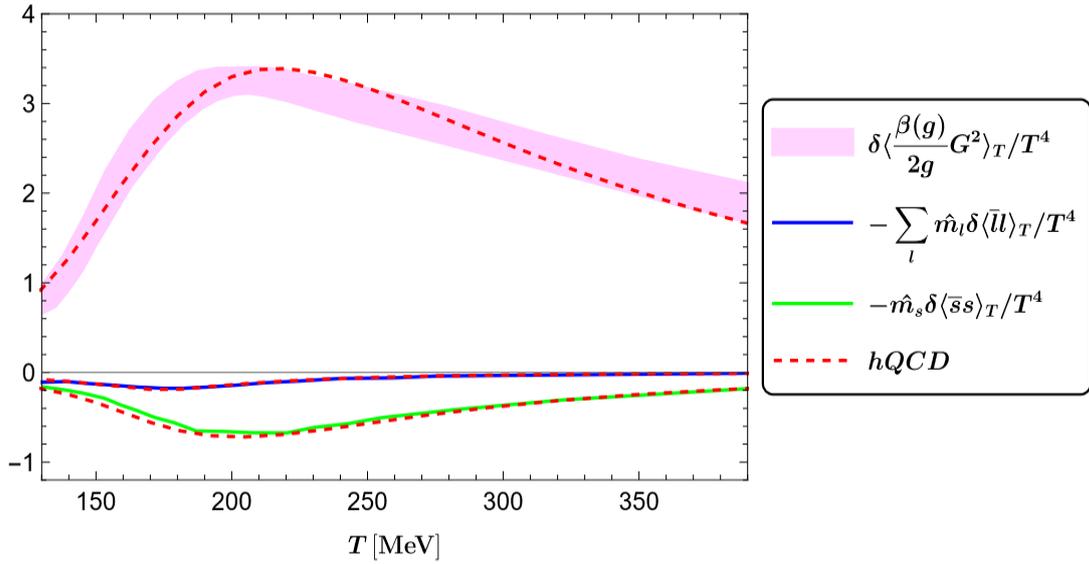


图 5. 3 夸克(下半)与胶子(上半)对迹反常的贡献, 红色虚线为全息结果

图 5.3 中蓝色、绿色实线以及浅红色区域分别对应着 LQCD 计算的迹反常中轻夸克、重夸克以及胶子的贡献。深红色虚线表示全息模型的结果。可见, 全息模型通过简单的引入探子的方式可以很好地在夸克胶子凝聚上与格点 QCD 数据相符合。

5.2. 宇宙相变引力波

宇宙早期发生的强耦合一阶相变 SFOPT (strong first-order phase transition) 是引力波 GW 的重要来源^[69]。本节将简单研究由模型预测的一阶相变所引起引力波的能谱以及其作为宇宙早期 SFOPT 的可能性。

宇宙早期引力波可以由假真空的等离子体背景下破缺相的泡泡成核和膨胀来理解^[70], 具体产生于气泡碰撞、声波和磁流体动力学湍流 (magnetohydrodynamic turbulence) 三种过程中。当气泡壁最终速度 $v_w < 1$ 时, 引力波将由声波主导。其能谱为^[71]:

$$h^2 \Omega_{GW}(f) = 8.5 \times 10^{-6} \left(\frac{100}{g_n}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{H_n}{\beta}\right) \left(\frac{\kappa\alpha}{1+\alpha}\right)^2 \times v_w \left(\frac{f}{f_{SW}}\right)^3 \left[\frac{7}{4+3(f/f_{SW})^2}\right]^{\frac{7}{2}}, \quad (5.10)$$

峰值频率为^[71]:

$$f_{SW} = 1.9 \times 10^{-8} \left(\frac{1}{v_w}\right) \left(\frac{\beta}{H_n}\right) \left(\frac{T_n}{100\text{Mev}}\right) \left(\frac{g_n}{100}\right)^{1/6} \text{ Hz}, \quad (5.11)$$

其中, T_n 表示一阶相变的临界温度, 由图 4.9 中的黑色一阶相变线获取。 $g_n = 45s_+/(2\pi^2T_n^3)$ 为有效自由度数。 $\kappa = \alpha/(0.73 + 0.083\sqrt{\alpha} + \alpha)$ 为动能效率系数, 表征相变潜热转移到声波中的效率。 $(\frac{\beta}{H_n})$ 为相变持续时间的倒数。 α 为相变强度, 由下式获得^[72]:

$$\alpha = \frac{\theta_+ - \theta_-}{3w_+} \Big|_{T=T_n} = \frac{\epsilon_+(T_n) - \epsilon_-(T_n)}{3w_+(T_n)}, \quad (5.12)$$

θ 是迹反常, $w = \epsilon + P$ 为焓。 (+), (-)分别表示假真空与真真空。 式子的分母同时也是一阶相变下的潜热。 我们取 $v_w = 0.95$, 能谱仅剩 $(\frac{\beta}{H_n})$ 这一个自由度。

由原始元素丰度的测量以及 CMB(宇宙微波背景)各向异性谱, 可知重子不对称性^[73]大约为 $\eta_B^{ob} \sim 10^{-10}$ 。 重子不对称性由 $\eta_B \equiv n_B/s$ 表示, 其中 n_B 为重子数密度、 s 为熵。 这对从全息模型理解宇宙早期相变带来了很强的约束。

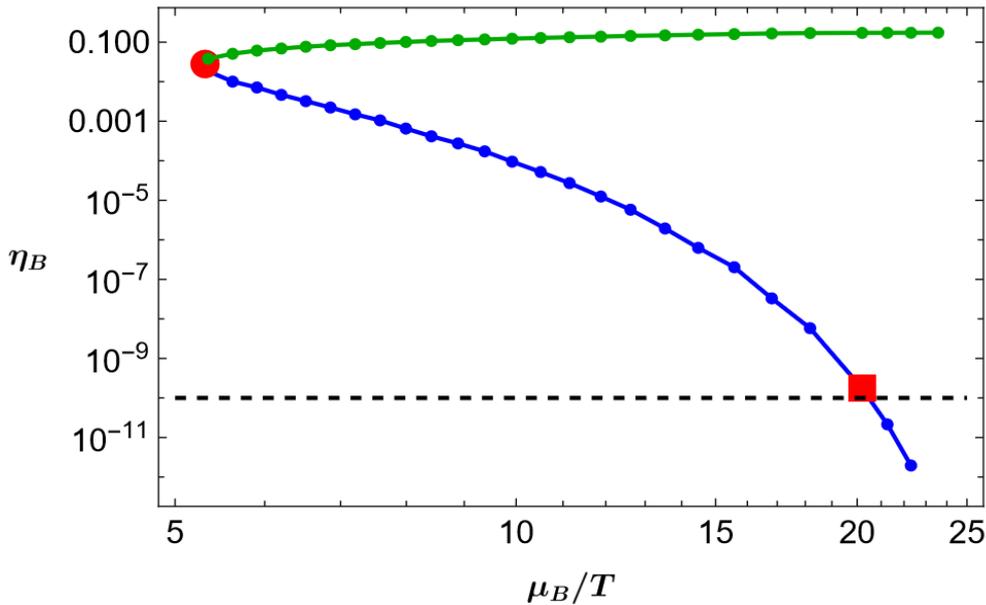


图 5. 4 一阶相变线上的重子不对称性, 蓝色为真真空, 绿色为假真空

我们给出全息模型一阶相变线上的重子不对称性如图 5.4 所示。其中蓝色曲线与绿色曲线分别是真真空与假真空下的重子不对称性。左侧的红色圆点表示 CEP，红色正方形则表示在 $\mu_B = 1000\text{MeV}$ 处。横向的灰色虚线则表示观测约束 $\eta_B^{ob} \sim 10^{-10}$ 。

在红色圆点的 CEP 处， $\eta_B \sim 10^{-2}$ ，与 η_B^{ob} 差了八个数量级。而在 $\mu_B = 1000\text{MeV}$ 的红色正方形处， $\eta_B \sim 10^{-10}$ 接近了观测约束的灰色虚线 η_B^{ob} 。这说明宇宙学相变可能发生于相图中 $\mu_B \sim 1000\text{MeV}$ ($\mu_B/T \sim 20$) 附近。

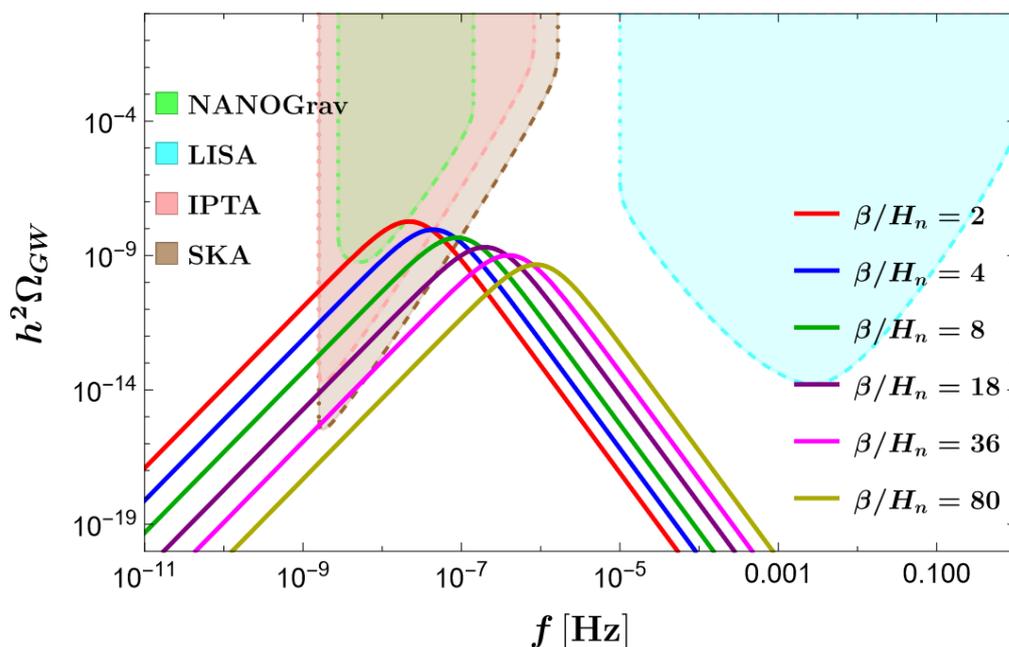


图 5.5 $\mu_B = 1000\text{MeV}$ 处的引力波能谱

根据(5.10)式，我们给出在 $\mu_B = 1000\text{MeV}$ 处由全息模型一阶相变引发的引力波能谱如上图 5.5 所示。相关参数为 $(T_n, \alpha, g_n) = (49.53\text{MeV}, 0.33, 185)$ 。 β/H_n 则作为仅剩的自由度从 2 至 80 进行扫描，对应图中从左侧红线扫描至右侧深黄线。此外图中还展示了 4 个引力波探测器的范围^[74]，绿色、蓝色、粉红色和棕色分别对应 NANOGrav (北美纳赫兹引力波天文台 North American Nanohertz Observatory for Gravitational Wave)、LISA (激光干涉空间天线 Laser Interferometer Space Antenna)、IPTA (国际脉冲星计时阵列 International Pulsar Timing Array) 以及 SKA (平方公里远射望远镜阵列 Square Kilometer Array)。其中，LISA 无法扫描到，而 IPTA 与 SKA 可以探测，并且在 $\beta/H_n \sim O(1)$ 的极端情况下也有可能被 NANOGrav 探测到。

进一步，在“little inflation (小暴胀)”下^{[75][76]}， $\mu_B < 1000\text{MeV}$ 的宇宙一阶相变也是可能的。

在这一模型下，宇宙可以有一个非常大的重子不对称^[77]，经由膨胀稀释到如今的观测值 η_B^{ob} 。

将暴胀前后分别表示为 i 、 f ，可以得到：

$$\frac{a_f}{a_i} = \left(\frac{\eta_{Bi}}{\eta_{Bf}} \right)^{1/3}, \quad (5.13)$$

其中， a 为尺度因子，假定共动体积下重子数守恒。引入 e-fold 数 $N \equiv \ln(a_f/a_i)$ 。考虑到重子数密度在一阶相变处从假真空突然到真真空，相应的 N 需要一个大值。我们取假真空的数值作为 η_{Bi} ，观测值 η_B^{ob} 作为 η_{Bf} 。

N 随 μ_B/T 行为如下图 5.6 所示。其中，左侧红线对应 CEP 的位置。可见， $N \sim 7$ 就足以将 CEP 附近的大重子不对称性稀释到观测值。

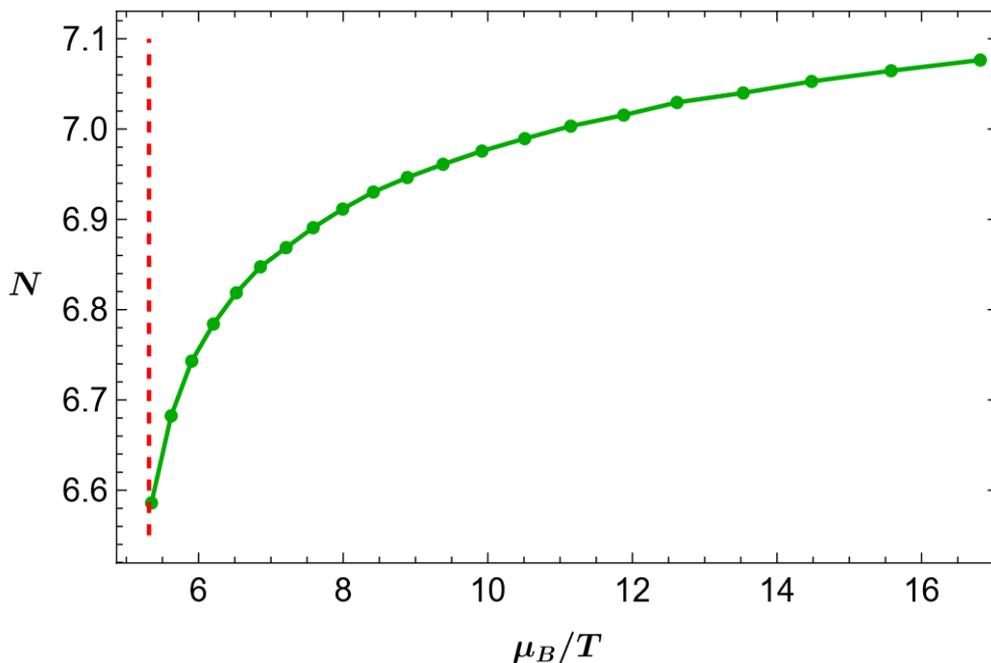


图 5.6 e-fold 数 N 随 μ_B/T 的行为

第六章 总结与展望

本文采用 EMD 模型，通过运动方程与两端展开进行黑洞的数值求解，研究了 QCD 相变的关键问题。通过应用全息字典与全息重整化方法，我们成功地得到了 QCD 的热力学行为，并与最新的 (2+1) 味格点 QCD 数据进行了定量比较。

在零化学势下确定好模型后，我们研究了有限化学势下的状态方程，并发现其与格点预测相符。这进一步验证了全息模型在有限化学势有限密度下的可靠性。

在更大的化学势下，我们给出了全息模型对包括 CEP 点、一阶相变线在内的有限温度有限化学势下相图的预测。符合格点要求的 CEP 结果再次表明了预言相图的可靠性，并且 CEP 位置处于 FXT、NICA 与 JPARC-HI 的覆盖范围内。

进一步，我们采用“探针”的方式探究了夸克与胶子凝聚，其结果可以很好的符合格点数据。此外，我们还考虑了由模型给出的一阶相变作为宇宙早期相变的可能，并且计算了由其引发的引力波能谱，发现可以由 IPTA 与 SKA 探测到，甚至在极端情况下也有可能被 NANOGrav 所探测。

这是一个用于探索 QCD 相图的定量模型，在此基础上我们将还有很多的工作。在提高模型的可靠性方面，可以考虑高阶的重子数极化率从而更精确地确定规范场的引入；在 QCD 相图的描述方面，我们也可以增加多个维度，例如奇异数、磁场、旋转等。更高维度的加入可以令我们更好地、更全面地理解多维的 QCD 相图。

此外，在夸克胶子凝聚方面，我们可以进一步考虑物质对背景的反作用，以得到更为合理的凝聚随温度的行为；在相变引力波上，我们也可以去考虑轻子不对称性等问题。

参考文献

- [1] Peskin M. An introduction to quantum field theory[M]. CRC press, 2018.
- [2] 八木浩辅. 夸克胶子等离子体: 从大爆炸到小爆炸[M]. 中国科学技术大学出版社, 2016.
- [3] 肖振军, 吕才典. 粒子物理学导论[M]. 科学出版社, 2016.
- [4] Bethke S. Experimental tests of asymptotic freedom[J]. Nuclear Physics B- Proceedings Supplements, 1997, 54(1-2): 314-324.
- [5] Goldstone J, Salam A, Weinberg S. Broken symmetries[J]. Physical Review, 1962, 127(3): 965.
- [6] Wambach J. The phase diagram of strongly interacting matter[J]. International Journal of Modern Physics E, 2007, 16(03): 867-878.
- [7] Tribble R, Heinz U. The frontiers of nuclear science: a long range plan[J]. arXiv preprint arXiv:0809.3137, 2007.
- [8] Fukushima K, Sasaki C. The phase diagram of nuclear and quark matter at high baryon density[J]. Progress in Particle and Nuclear Physics, 2013, 72: 99-154.
- [9] Wetterich C. Exact evolution equation for the effective potential[J]. Physics Letters B, 1993, 301(1): 90-94.
- [10] Philipsen O. The QCD equation of state from the lattice[J]. Progress in Particle and Nuclear Physics, 2013, 70: 55-107.
- [11] Maldacena J. The large-N limit of superconformal field theories and supergravity[J]. International journal of theoretical physics, 1999, 38(4): 1113-1133.
- [12] Witten E. Anti de Sitter space and holography[J]. arXiv preprint hep-th/9802150, 1998.
- [13] Witten E. Anti-de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories[J]. arXiv preprint hep-th/9803131, 1998.
- [14] McMahon D. String theory demystified[M]. McGraw Hill Professional, 2008.
- [15] Polchinski J. String theory[M]. 2005.

- [16] Adams A, Carr L D, Schäfer T, et al. Strongly correlated quantum fluids: ultracold quantum gases, quantum chromodynamic plasmas and holographic duality[J]. *New Journal of Physics*, 2012, 14(11): 115009.
- [17] Kadanoff L P. Scaling laws for Ising models near T_c [J]. *Physics Physique Fizika*, 1966, 2(6): 263.
- [18] Wilson K G, Kogut J. The renormalization group and the ϵ expansion[J]. *Physics reports*, 1974, 12(2): 75-199.
- [19] Wilson K G. The renormalization group: Critical phenomena and the Kondo problem[J]. *Reviews of modern physics*, 1975, 47(4): 773.
- [20] 't Hooft G. A planar diagram theory for strong interactions[M]//*The Large N Expansion In Quantum Field Theory And Statistical Physics: From Spin Systems to 2-Dimensional Gravity*. 1993: 80-92.
- [21] D'HOKER E, Freedman D Z. Supersymmetric gauge theories and the AdS/CFT correspondence[M]//*Strings, Branes and Extra Dimensions: TASI 2001*. 2004: 3-159.
- [22] DeWolfe O. TASI lectures on applications of gauge/gravity duality[J]. arXiv preprint arXiv:1802.08267, 2018.
- [23] Aharony O. The non-AdS/non-CFT correspondence, or three different paths to QCD[J]. *Progress in string, field and particle theory*, 2003: 3-24.
- [24] Sakai T, Sugimoto S. Low energy hadron physics in holographic QCD[J]. *Progress of Theoretical Physics*, 2005, 113(4): 843-882.
- [25] Polchinski J, Strassler M J. Hard scattering and gauge/string duality[J]. *Physical Review Letters*, 2002, 88(3): 031601.
- [26] Karch A, Katz E, Son D T, et al. Linear confinement and AdS/QCD[J]. *Physical Review D*, 2006, 74(1): 015005.
- [27] Li D, He S, Huang M. Temperature dependent transport coefficients in a dynamical holographic QCD model[J]. *Journal of High Energy Physics*, 2015, 2015(6): 1-24.
- [28] Li D, He S, Huang M, et al. Thermodynamics of deformed AdS5 model with a positive/negative quadratic correction in graviton-dilaton system[J]. *Journal of High Energy Physics*, 2011, 2011(9): 1-38.
- [29] 于渌. 边缘奇迹: 相变和临界现象[M]. 科学出版社, 2016.
- [30] DeWolfe O, Gubser S S, Rosen C. A holographic critical point[J]. *Physical*

- Review D, 2011, 83(8): 086005.
- [31] Gubser S S, Nellore A, Pufu S S, et al. Thermodynamics and bulk viscosity of approximate black hole duals to finite temperature quantum chromodynamics[J]. Physical review letters, 2008, 101(13): 131601.
- [32] DeWolfe O, Gubser S S, Rosen C. Dynamic critical phenomena at a holographic critical point[J]. Physical Review D, 2011, 84(12): 126014.
- [33] Borsányi S, Fodor Z, Hoelbling C, et al. Full result for the QCD equation of state with $2+1$ flavors[J]. Physics Letters B, 2014, 730: 99-104.
- [34] Bazavov A, Bhattacharya T, DeTar C, et al. Equation of state in $(2+1)$ -flavor QCD[J]. Physical Review D, 2014, 90(9): 094503.
- [35] Borsányi S, Fodor Z, Guenther J N, et al. Lattice QCD equation of state at finite chemical potential from an alternative expansion scheme[J]. Physical review letters, 2021, 126(23): 232001.
- [36] Cai R G, He S, Li L, et al. Probing QCD critical point and induced gravitational wave by black hole physics[J]. Physical Review D, 2022, 106(12): L121902.
- [37] Grefa J, Noronha J, Noronha-Hostler J, et al. Hot and dense quark-gluon plasma thermodynamics from holographic black holes[J]. Physical Review D, 2021, 104(3): 034002.
- [38] Critelli R, Noronha J, Noronha-Hostler J, et al. Critical point in the phase diagram of primordial quark-gluon matter from black hole physics[J]. Physical Review D, 2017, 96(9): 096026.
- [39] Yang Y, Yuan P H. QCD phase diagram by holography[J]. Physics Letters B, 2022, 832: 137212.
- [40] de Haro S, Skenderis K, Solodukhin S N. Holographic reconstruction of space-time and renormalization in the ads/cft correspondence[J]. Communications in Mathematical Physics, 2001, 217: 595-622.
- [41] Skenderis K. Lecture notes on holographic renormalization[J]. Classical and Quantum Gravity, 2002, 19(22): 5849.
- [42] Gibbons G W, Hawking S W. Action integrals and partition functions in quantum gravity[J]. Physical Review D, 1977, 15(10): 2752.
- [43] Kiritsis E, Li L. Holographic competition of phases and superconductivity[J]. Journal of High Energy Physics, 2016, 2016(1): 1-67.
- [44] Cai R G, Li L, Yang R Q. No inner-horizon theorem for black holes with charged

- scalar hairs[J]. Journal of High Energy Physics, 2021, 2021(3): 1-26.
- [45] Bollweg D, Goswami J, Kaczmarek O, et al. Taylor expansions and Padé approximants for cumulants of conserved charge fluctuations at nonvanishing chemical potentials[J]. Physical Review D, 2022, 105(7): 074511.
- [46] Gao F, Liu Y. QCD phase transitions via a refined truncation of Dyson-Schwinger equations[J]. Physical Review D, 2016, 94(7): 076009.
- [47] Qin S, Chang L, Chen H, et al. Phase diagram and critical end point for strongly interacting quarks[J]. Physical Review Letters, 2011, 106(17): 172301.
- [48] Shi C, Wang Y, Jiang Y, et al. Locate QCD critical end point in a continuum model study[J]. Journal of High Energy Physics, 2014, 2014(7): 1-10.
- [49] Fischer C S, Luecker J, Welzbacher C A. Phase structure of three and four flavor QCD[J]. Physical Review D, 2014, 90(3): 034022.
- [50] Xin X, Qin S, Liu Y. Quark number fluctuations at finite temperature and finite chemical potential via the Dyson-Schwinger equation approach[J]. Physical Review D, 2014, 90(7): 076006.
- [51] Gao F, Pawłowski J M. QCD phase structure from functional methods[J]. Physical Review D, 2020, 102(3): 034027.
- [52] Masayuki A, Koichi Y. Chiral restoration at finite density and temperature[J]. Nuclear Physics A, 1989, 504(4): 668-684.
- [53] Li Z, Xu K, Wang X, et al. The kurtosis of net baryon number fluctuations from a realistic Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio model along the experimental freeze-out line[J]. The European Physical Journal C, 2019, 79(3): 245.
- [54] Fu W, Pawłowski J M, Rennecke F. QCD phase structure at finite temperature and density[J]. Physical Review D, 2020, 101(5): 054032.
- [55] Zhang H, Hou D, Kojo T, et al. Functional renormalization group study of the quark-meson model with ω meson[J]. Physical Review D, 2017, 96(11): 114029.
- [56] Adam J, Adamczyk L, Adams J R, et al. Nonmonotonic energy dependence of net-proton number fluctuations[J]. Physical review letters, 2021, 126(9): 092301.
- [57] Sissakian A N, Sorin A S, NICA collaboration. The nuclotron-based ion collider facility (NICA) at JINR: new prospects for heavy ion collisions and spin physics[J]. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, 2009, 36(6): 064069.
- [58] Ablyazimov T, Abuhoza A, Adak R P, et al. Challenges in QCD matter physics--

- The scientific programme of the Compressed Baryonic Matter experiment at FAIR[J]. The European Physical Journal A, 2017, 53: 1-14.
- [59] Durante M, Indelicato P, Jonson B, et al. All the fun of the FAIR: fundamental physics at the facility for antiproton and ion research[J]. Physica Scripta, 2019, 94(3): 033001.
- [60] Xu N, Fukushima K, Mohanty B. The Little-Bang and the femto-nova in nucleus-nucleus collisions[J]. AAPPS Bulletin, 2021, 31: 1-16.
- [61] Karch A, Katz E, Son D T, et al. Linear confinement and AdS/QCD[J]. Physical Review D, 2006, 74(1): 015005.
- [62] Bazavov A, Bhattacharya T, Cheng M, et al. Chiral and deconfinement aspects of the QCD transition[J]. Physical Review D, 2012, 85(5): 054503.
- [63] Gubler P, Satow D. Recent progress in QCD condensate evaluations and sum rules[J]. Progress in Particle and Nuclear Physics, 2019, 106: 1-67.
- [64] Shifman M A, Vainshtein A I, Zakharov V I. Remarks on Higgs-boson interactions with nucleons[J]. Physics Letters B, 1978, 78(4): 443-446.
- [65] Cohen T D, Furnstahl R J, Griegel D K. Quark and gluon condensates in nuclear matter[J]. Physical Review C, 1992, 45(4): 1881.
- [66] d'Enterria D, Kluth S. α_s (2019): Precision measurements of the QCD coupling (2019)[J]. arXiv preprint arXiv:1907.01435.
- [67] Alekseev A I. Strong coupling constant to four loops in the analytic approach to QCD[J]. Few-Body Systems, 2003, 32(4): 193-217.
- [68] Vermaseren J A M, Larin S A, Van Ritbergen T. The 4-loop quark mass anomalous dimension and the invariant quark mass[J]. Physics Letters B, 1997, 405(3-4): 327-333.
- [69] Bian L, Cai R G, Cao S, et al. The gravitational-wave physics II: progress[J]. Science China Physics, Mechanics & Astronomy, 2021, 64(12): 120401.
- [70] Cai R G, Cao Z, Guo Z K, et al. The gravitational-wave physics[J]. National Science Review, 2017, 4(5): 687-706.
- [71] Guo H K, Sinha K, Vagie D, et al. The benefits of diligence: how precise are predicted gravitational wave spectra in models with phase transitions?[J]. Journal of High Energy Physics, 2021, 2021(6): 1-46.
- [72] Caprini C, Chala M, Dorsch G C, et al. Detecting gravitational waves from cosmological phase transitions with LISA: an update[J]. Journal of Cosmology

- and Astroparticle Physics, 2020, 2020(03): 024.
- [73] Aghanim N, Akrami Y, Ashdown M, et al. Planck 2018 results-VI. Cosmological parameters[J]. Astronomy & Astrophysics, 2020, 641: A6.
- [74] Schmitz K. New sensitivity curves for gravitational-wave signals from cosmological phase transitions[J]. Journal of High Energy Physics, 2021, 2021(1): 1-62.
- [75] Boeckel T, Schaffner-Bielich J. A little inflation in the early universe at the QCD phase transition[J]. Physical review letters, 2010, 105(4): 041301.
- [76] Boeckel T, Schaffner-Bielich J. Little inflation at the cosmological QCD phase transition[J]. Physical Review D, 2012, 85(10): 103506.
- [77] Affleck I, Dine M. A new mechanism for baryogenesis[J]. Nuclear Physics B, 1985, 249(2): 361-380.

附录 A

本附录将具体给出 5.1 节中所用到的 4 圈下的 β 函数与跑动夸克质量:

由 4 圈 β 函数^[66], (5.9) 式中左侧函数为:

$$\frac{\beta}{2g} = -(2\pi\beta_0\alpha_s + 8\pi^2\beta_1\alpha_s^2 + 32\pi^3\beta_2\alpha_s^3 + 128\pi^4\beta_3\alpha_s^4), \quad (\text{A.1})$$

其中,

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{1}{(4\pi)^2} (11 - \frac{2}{3}N_f), & \beta_1 &= \frac{1}{(4\pi)^4} (102 - \frac{38}{3}N_f), \\ \beta_2 &= \frac{1}{(4\pi)^6} (\frac{2857}{2} - \frac{5033}{18}N_f + \frac{325}{54}N_f^2), \\ \beta_3 &= \frac{1}{(4\pi)^8} [\frac{149753}{6} + 3564\zeta_3 - (\frac{1078361}{162} + \frac{6508}{27})N_f \\ &\quad + (\frac{50065}{162} + \frac{6472}{81}\zeta_3)N_f^2 + \frac{1093}{729}N_f^3]. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

这里 4 圈下跑动耦合常数为^[67]:

$$\begin{aligned} \alpha_s(\mu) &= \frac{1}{4\pi\beta_0L_\mu} [1 - \frac{\beta_1}{\beta_0^2L_\mu} \ln(L_\mu) + \frac{\beta_1^2}{\beta_0^4L^2} (\ln^2(L_\mu) - \ln(L_\mu)) \\ &\quad - 1 + \frac{\beta_0\beta_2}{\beta_1^2}) - \frac{\beta_1^3}{\beta_0^6L_\mu^3} (\ln^3(L_\mu) - \frac{5}{2}\ln^2(L_\mu)) \\ &\quad - (\frac{2 - \frac{3\beta_0\beta_2}{\beta_1^2}}{\beta_1^2}) \ln(L_\mu) + \frac{1}{2} - \frac{\beta_0^2\beta_3}{2\beta_1^3}], \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

其中,

$$L_\mu = \ln(\mu^2/\Lambda_{QCD}^2), \quad (\text{A.4})$$

μ 为重整化能标, Λ_{QCD} 为 QCD 能标。

跑动夸克质量在 4 圈下为^[68]:

$$\hat{m}_q(\mu) = \bar{m}_q(\frac{\alpha_s(\mu)}{\pi})^{\gamma_0/(4\pi^2\beta_0)} [1 + A_1(\frac{\alpha_s(\mu)}{\pi}) + \frac{(A_1^2 + A_2)}{2}(\frac{\alpha_s(\mu)}{\pi})^2]$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}A_1^3+\frac{3}{2}A_1A_2+A_3\right)\left(\frac{\alpha_s(\mu)}{\pi}\right)^3, \quad (\text{A.5})$$

其中,

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{\beta_1\gamma_0}{\beta_0^2} + \frac{\gamma_1}{(2\pi)^2\beta_0}, \\ A_2 &= (2\pi)^2\frac{\gamma_0}{\beta_0^2}\left(\frac{\beta_1^2}{\beta_0}-\beta_2\right) - \frac{\beta_1\gamma_1}{\beta_0^2} + \frac{\gamma_2}{(2\pi)^2\beta_0}, \\ A_3 &= (2\pi)^4\left[\frac{\beta_1\beta_2}{\beta_0} - \frac{\beta_1}{\beta_0}\left(\frac{\beta_1^2}{\beta_0}-\beta_2\right) - \beta_3\right]\frac{\gamma_0}{\beta_0^2} \\ &\quad + (2\pi)^2\frac{\gamma_1}{\beta_0^2}\left(\frac{\beta_1^2}{\beta_0}-\beta_2\right) - \frac{\beta_1\gamma_2}{\beta_0^2} + \frac{\gamma_3}{(2\pi)^2\beta_0}, \\ \gamma_0 &= 1, \quad \gamma_1 = \frac{1}{16}\left(\frac{202}{3} - \frac{20}{9}N_f\right), \\ \gamma_2 &= \frac{1}{64}\left[1249 - \left(\frac{2216}{27} + \frac{160}{3}\zeta_3\right)N_f - \frac{140}{81}N_f^2\right], \\ \gamma_3 &= \frac{1}{256}\left[\frac{4603055}{162} + \frac{135680}{27}\zeta_3 - 8800\zeta_5 \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{91723}{27} - \frac{34192}{9}\zeta_3 + 880\zeta_4 + \frac{18400}{9}\zeta_5\right)N_f \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{5242}{243} + \frac{800}{9}\zeta_3 - \frac{160}{3}\zeta_4\right)N_f^2 + \left(-\frac{332}{243} + \frac{64}{27}\zeta_3\right)N_f^3\right], \quad (\text{A.6}) \end{aligned}$$

这里 ζ 表示 Riemann ζ 函数, 有 $\zeta_3 = 1.2020569$, $\zeta_4 = 1.0823232$, $\zeta_5 = 1.0369278$ 。

\bar{m}_q 为重整化参数, 文中我们对轻夸克取 $\bar{m}_l = 23\text{MeV}$, 对 s 夸克取 $\bar{m}_s =$

460MeV , $\bar{m}_s/\bar{m}_l = 20$ 。由于是(2+1)味, 故 $N_f = 3$ 。