

分类号: O412.1

单位代码: 10183

研究生学号: 2021322002

密 级: 公 开



吉林大学

硕士学位论文

(学术学位)

基于规范/引力对偶的 QCD 相结构研究

Exploring QCD phase structure through gauge/gravity duality

作者姓名: 扶青璇

专 业: 理论物理

研究方向: 高能物理

指导教师: 何松 教授

培养单位: 物理学院

2024 年 6 月

基于规范/引力对偶的 QCD 相结构研究

Exploring QCD phase structure through gauge/gravity duality

作者姓名：扶青璇

专业名称：理论物理

指导教师：何松 教授

学位类别：理学硕士

答辩日期：2024 年 6 月 3 日

摘要

基于规范/引力对偶的 QCD 相结构研究

通过对撞机实验以及格点 QCD(Lattice QCD, LQCD) 等方法, 人们定性与半定量地得到了 QCD(Quantum Chromodynamics) 相结构。目前人们相信在零重子数化学势时物质会经历 crossover, 一种光滑连续的物态变化过程。随着重子化学势的增加, 物态变化变为一阶相变, 而在 crossover 与一阶相变中间存在一个临界点 (Critical Endpoint, CEP)。临界点位置的确定和有限化学势下的 QCD 热力学性质一直是高能物理的研究热点与重点。但是基于第一性原理的格点 QCD 方法由于符号问题无法给出有限化学势下的详细 QCD 热力学信息。

AdS/CFT 对偶 (Anti-de Sitter/Conformal Field Theory duality) 为 Maldacena 于 1997 年提出的猜想, 指 $(d+1)$ 维的反德西特时空对偶于 d 维的 $\mathcal{N} = 4$ 超杨米尔斯场。其后 AdS/CFT 对偶发展为规范引力对偶。此猜想为解决如何在有限化学势下得到 QCD 热力学问题提供了一条全新的思路。

本文也将基于全息对偶进行研究, 基于 EMD 模型 (Einstein-Maxwell-Dilation), 通过引入伸缩子场和 $U(1)$ 规范场, 我们能够破坏边界场论的共形对称性并引入重子数流。在通过拟合 BMW 组格点数据来固定模型自由度后, 我们能够解得有限化学势下的 QCD 热力学性质, 并通过与格点给出的低化学势下的结果对比进一步验证模型的可靠性。最终我们可以定量地得到 QCD 相图中的临界点位置以及一阶相变线等信息。

在此基础上, 我们进一步求解临界点附近的临界行为并与其他有效模型以及实验所给出的临界行为做对比。此外, 我们还引入了探子来研究手征凝聚、胶子凝聚, 并通过与格点 QCD 对比对模型进行了自洽性的检验。

关键词:

AdS/CFT 对偶, 全息 QCD, QCD 相图结构, 临界指数

Abstract

Exploring QCD phase structure through gauge/gravity duality

QCD is studied through collider experiments, lattice QCD (LQCD), etc. At zero baryon chemical potential, matter undergoes a crossover, subsequently transitioning to a first-order phase with increasing chemical potential, with a critical endpoint (CEP) existing between the two.

While widely accepted lattice QCD methods encounter challenges in providing thermodynamic information for QCD at finite chemical potential due to sign problems, a demand arises for novel approaches to address this issue.

The Anti-de Sitter/Conformal Field Theory duality (AdS/CFT) gives the equivalence between (d+1)-dimensional Anti-de Sitter spacetime and d-dimensional $\mathcal{N} = 4$ supersymmetric Yang-Mills theory. AdS/CFT provides a novel approach to solving QCD thermodynamics under finite chemical potential through the dual gravitational theory.

This paper employs the gauge/gravity duality and uses the EMD model, introducing the dilaton field and U(1) gauge field to break conformal symmetry and incorporate baryon number density into QCD field theory in the boundary. Degrees of freedom in the model are fixed by fitting with lattice data given by BMW collaboration. Also, the resulting thermodynamic properties under finite chemical potential are compared with low chemical potential lattice QCD results. Subsequently, the critical endpoint location and first-order phase transition line in the QCD phase diagram are determined.

Further investigation involves exploring critical behavior near the CEP and we also compare it with the results from other models and experiments. Moreover, Probes are introduced to obtain chiral condensates and gluon condensates which Revisits the validity of our model.

Keywords:

AdS/CFT duality, Holographic QCD, QCD phase diagram, Critical exponents

目 录

第 1 章 引言.....	1
第 2 章 QCD 理论.....	3
2.1 QCD 高能行为:渐进自由.....	4
2.2 QCD 低能行为:非微扰真空.....	5
2.2.1 手征对称性破缺.....	5
2.2.2 颜色禁闭.....	6
2.3 相变.....	8
第 3 章 AdS/CFT 对偶.....	11
3.1 AdS/CFT 对偶起源.....	11
3.1.1 重整化群流视角下的 AdS/CFT 对偶.....	11
3.1.2 弦论视角下的 AdS/CFT 对偶.....	12
3.2 全息对偶字典.....	17
3.2.1 标量场.....	17
3.2.2 矢量场.....	20
第 4 章 全息 QCD 模型.....	23
4.1 硬墙模型.....	23
4.2 软墙模型.....	27
第 5 章 EMD 模型与 QCD 相图.....	29
5.1 EMD 模型.....	29
5.2 运动方程及边界展开.....	31
5.2.1 IR 展开(事件视界处).....	32
5.2.2 UV 展开(AdS 边界处).....	32
5.3 全息重整化.....	33
5.4 热力学与稳定性.....	34
5.4.1 状态方程.....	35
5.5 QCD 相结构.....	40
第 6 章 临界指数与夸克凝聚.....	41
6.1 临界指数.....	41
6.1.1 沿一阶相变线上的结果 β	41
6.1.2 沿临界等温线的结果 δ	42
6.1.3 沿一阶相变线反向延长线的结果 α 、 γ	42
6.1.4 总结.....	44
6.2 夸克凝聚.....	45
6.2.1 与 BMW 组的格点结果对比.....	45

6.2.2 与 hotQCD 组的格点结果对比	47
第 7 章 结论与展望	53
参考文献.....	55

插图目录

2.1	精细结构常数 α_s 随能标 Q 跑动的示意图 ^[1]	5
2.2	夸克流质量和夸克味道数对 QCD 相图的影响 ^[2]	8
2.3	QCD 相图结构 ^[3]	9
3.1	格点体系随特征尺度 u 进行粗粒化的过程 ^[4]	12
4.1	ρ 介子线性谱 ^[5]	28
5.1	零重子化学势下的能量密度、迹反常和压强与格点 QCD ^[6] 对比结果	36
5.2	零重子化学势下的极化率与声速与格点 QCD ^[6,7] 的对比结果	37
5.3	有限重子化学势下的熵密度 s , 压强 P , 能量密度 ϵ , 重子数密度 ρ_B 与格点 QCD ^[8] 的对比结果	38
5.4	有限化学势下自由能随温度的变化	39
5.5	hQCD 预言温服密度相图	40
6.1	由一阶相变线上熵密度不连续得到的临界指数 β	42
6.2	由等温线上的熵密度临界行为得到的临界指数 δ	43
6.3	由一阶相变线切线延长线上的临界行为得到的临界指数 α	43
6.4	由一阶相变线切线延长线上的临界行为得到的临界指数 γ	44
6.5	重整化后的手征凝聚 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_R$ 与 $\Delta_{l,s}$	46
6.6	有限重子化学势下重整化后的手征凝聚 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_R$ 和 $\Delta_{l,s}$	47
6.7	轻夸克 ($l=u, d$) 和 s 夸克的重整化后的手征凝聚 Δ_q^R	48
6.8	轻夸克凝聚 $\langle \bar{l}l \rangle_T / \langle 0 \bar{l}l 0 \rangle$ 和 s 夸克凝聚 $\langle \bar{s}s \rangle_T / \langle 0 \bar{s}s 0 \rangle$	48
6.9	胶子凝聚结果及其中夸克凝聚的贡献	51
6.10	有限重子化学势下的轻夸克和 s 夸克凝聚的重整化后的手征凝聚	51

表 格 目 录

6.1 临界指数	44
----------------	----

第 1 章 引言

目前自然界中存在 4 种基本相互作用：引力、弱相互作用、电磁力和强相互作用。其中，量子色动力学 (Quantum Chromodynamics, QCD) 所描述的强相互作用使得夸克和胶子组合成为核子，即质子和中子，在强相互作用的剩余作用下，核子被紧密地束缚形成原子核，进而构成了自然界中大部分的可见物质。通过高能实验，人们验证了这一想法并证实了夸克作为基本自由度的存在^[9]。

至今为止，人们构建了 3 代 6 味夸克的图像，分别为上 (u)、下 (d)、奇 (s)、粲 (c)、底 (b) 及顶 (t)^[10,11]，并通过实验验证了模型的正确性^[12-14]。之后人们发现除了味道自由度以外，夸克还具有色自由度。

虽然自然界中并不存在自由夸克，但人们普遍认为，如果将物质加热到足够高的温度或者施加足够的压力后，夸克胶子将经历相变形成夸克胶子等离子体 (Quark Gluon Plasma, QGP)，此时系统的基本自由度由强子变成了夸克和胶子，由于宇宙大爆炸后几十微米内的早期宇宙有着类似的温度，此时两个系统将有着相似的演化轨迹与相变过程，因此，对夸克胶子等离子体性质以及 QCD 相变的研究有利于加深人们对物质结构、宇宙演化的理解。

目前有很多关于 QCD 相图的研究正在进行中，如格点 QCD^[15]、NJL 模型、泛函重整群等，本文采取的研究方法为全息原理^[16,17]，全息原理能够从第一性原理出发，给出有限化学势下的 QCD 相图结构。

AdS/CFT 对偶起源于超弦，在 1997 年由 Juan Maldacena 提出^[18]。AdS/CFT 对偶猜想提出，在 $(n+1)$ 维的 AdS (Anti-de Sitter) 时空中的量子引力理论等价于 AdS 时空 n 维边界上的共形场论。而规范场论用于描述除引力以外的 3 种基本相互作用力，例如，U(1) 规范场用于描述电磁力，SU(3) 规范场用于描述 QCD。我们研究的 QCD 虽然不是共形场论，但人们猜想其仍有对应的量子引力理论。因为其强耦合的相互作用，从 QCD 理论来计算 QCD 相图结构十分困难，全息原理提供了一种全新的方法，即通过与强耦合场论对偶的引力理论出发来计算得到场论的结果^[19]。

本文的研究方法基于 EMD (Einstein-Maxwell-Dilaton) 模型，模型引入了伸

缩子场和 $U(1)$ 规范场, 通过求解对偶的引力理论中的黑洞解来得到对偶场论的热力学, 从而预测 QCD 相结构。此外, 我们还计算了临界点附近热力学量的临界行为, 以及通过探针计算了夸克胶子凝聚, 这进一步验证了我们模型的有效性。

本文的结构如下: 第一章为引言。第二章回顾了 QCD 理论的基本性质。第三章简要阐述了全息对偶的起源, 并利用全息字典给出引力系统与边界理论的具体对偶关系。第四章简要地介绍了两个全息 QCD 模型。第五章利用 EMD 模型计算了夸克胶子等离子体的热力学并给出 QCD 相结构。第六章在前面的基础上, 计算了模型地临界行为, 并通过求解探针作用量研究夸克胶子凝聚。

第 2 章 QCD 理论

量子色动力学 (QCD) 是用于描述夸克和胶子之间强相互作用的一种非阿贝尔理论。本章将简要介绍 QCD 理论的基本性质以及 QCD 相图。

经典 QCD 理论的拉格朗日密度可表示为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{QCD}} &= \bar{q}^\alpha (i\not{D}_{\alpha\beta} - m\delta_{\alpha\beta}) q^\beta - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}, \\ D_\mu &\equiv \partial_\mu + ig t^a A_\mu^a, \\ F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf_{abc} A_\mu^b A_\nu^c.\end{aligned}\quad (2.1)$$

其中 q_α ($\alpha = 1, 2, 3$) 表示夸克自由度, 构成 SU(3) 的基础表示。 t^a 为 SU(3) 生成元, 满足关系式

$$[t^a, t^b] = if_{abc} t^c, \quad \text{tr}(t^a t^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}.\quad (2.2)$$

其中, f_{abc} 是完全反对称结构常数。耦合常数 g 是一个无量纲常数, 当 g 很小时, 散射振幅可以通过微扰计算得到。 A_μ^a ($a = 1, \dots, 8$) 为胶子场, 构成 SU(3) 的伴随表示, $F_{\mu\nu}^a$ 为其场强张量。夸克场和胶子场在 SU(3) 变换下的行为为

$$\begin{aligned}q(x) &= e^{i\theta^a t^a} q(x), \\ A_\mu^a(x) &= e^{i\theta^a t^a} \left(A_\mu^a t^a + \frac{i}{g} \partial_\mu \right) e^{-i\theta^a t^a}.\end{aligned}\quad (2.3)$$

其中, θ^a 为群参数, 如果 θ^a 不依赖于时空坐标 x , 则对称性为整体规范不变性, 如果 θ^a 依赖于时空坐标 x , 则对称性为定域的。拉氏密度在以上变换下保持不变。对 q_α 和 A_μ^a 进行变分, 可以得到夸克和胶子的狄拉克方程以及杨-米尔斯方程,

$$\begin{aligned}(i\not{D} - m)q &= 0, \\ [D_\nu, F^{\nu\mu}] &= gj^\mu, \quad j^\mu = t^a (\bar{q}\gamma^\mu t^a q).\end{aligned}\quad (2.4)$$

2.1 QCD 高能行为：渐进自由

在计算圈图时，由于高动量中间态的存在，QCD 存在紫外发散问题，需要通过重整化来得到有效物理量。作为可重整理论，QCD 可以通过重定义裸参数来吸收发散项。

首先，我们对理论进行正规化，有三种方法可以实现：截断法，引入一个有限的截断参数来对动量中间态积分进行截断；Pauli-Villars 正规化，通过将积函数分母幂次提高来使结果收敛；以及维数正规化，通过对 4 维时空积分转换为对 $(4 - \epsilon)$ 维时空积分实现。需要注意的是，只有维数正规化能够保持规范不变性和 Lorentz 协变性。

引入重整化能标 κ ，在微扰情况下对可观测量的重整化修正为

$$R[\alpha_s, \sqrt{s}/\kappa] = \left[1 + c_1(\sqrt{s}/\kappa) \frac{\alpha_s(\kappa)}{\pi} + c_2(\sqrt{s}/\kappa) \left(\frac{\alpha_s(\kappa)}{\pi} \right)^2 + \dots \right], \quad (2.5)$$

这里 $\alpha_s \equiv g^2/4\pi$ 为强相互作用的精细结构常数。由于可观测量不应依赖于重整化能标，因此重整化后的耦合常数 g 等参数将随着能标 κ 跑动来保证重整化修正 R 不依赖于能标，即

$$\kappa \frac{\partial g}{\partial \kappa} = \beta, \quad (2.6)$$

在维数正规化的最小减除方案下，给出 β 函数为^[20]

$$\begin{aligned} \beta(g) &= -\beta_0 g^3 - \beta_1 g^5 + \dots, \\ \beta_0 &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left(11 - \frac{2}{3} N_f \right), \quad \beta_1 = \frac{1}{(4\pi)^4} \left(102 - \frac{38}{3} N_f \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

当 $N_f \leq 8$ 时， β 函数为负，耦合常数将随着重整化能标增大而减小^[21]。这是 QCD 的一个重要特性，即紫外渐进自由性^[22-24]。紫外渐进自由性保证了在高能情况下，QCD 的微扰计算是可靠的。然而从图 2.1 可以看出，在低能情况下，耦合常数 g 增大，微扰理论不再有效，需要引入新的理论来描述^[1]。

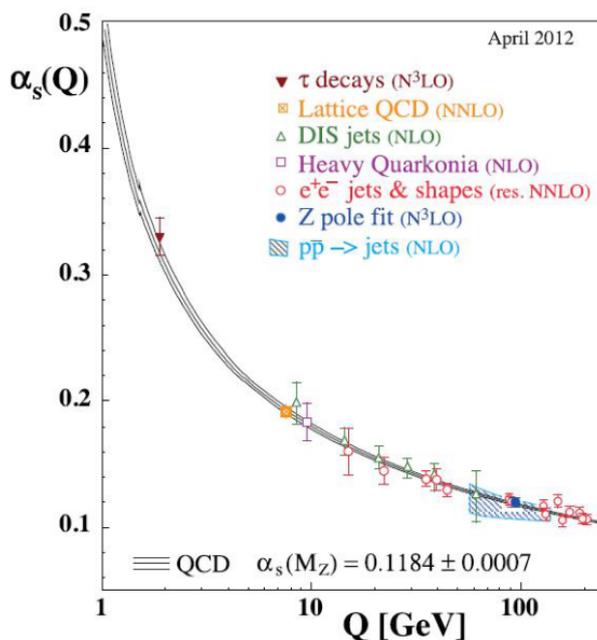


图 2.1 精细结构常数 α_s 随能标 Q 跑动的示意图^[1]

2.2 QCD 低能行为：非微扰真空

在高能、小尺度区域（能量远高于 1GeV），QCD 微扰真空可以近似描述物理真空的性质，手征对称性近似地存在。但随着能量降低到 1GeV 附近且高于 0.2GeV 时，在这一非微扰区，凝聚效应变得显著，手征对称性开始自发破缺，但此时颜色禁闭还未发生。在低于 0.2GeV 能区，由于颜色禁闭，夸克和胶子开始以色单态的形式存在。

2.2.1 手征对称性破缺

手征性算符 $\gamma_5 \equiv i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ 有两个本征态，分别对应左旋夸克和右旋夸克，其本征值为 ± 1 ，

$$q_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)q, \quad q_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)q. \quad (2.8)$$

在 $U_L(N_f) \times U_R(N_f)$ 变换下,

$$q_L \rightarrow e^{-i\lambda^j \theta_L^j} q_L, \quad q_R \rightarrow e^{-i\lambda^j \theta_R^j} q_R, \quad (j = 1, \dots, N_f^2 - 1) \quad (2.9)$$

其中, θ 是与时空坐标 x^μ 无关的参数。 $\lambda^0 = \sqrt{2/N_f}$, $\lambda^j = 2t^j$, 这里 t^j 为 $U(N_f)$ 群生成元。在经典层面上, \mathcal{L}_{QCD} 在此变换下不变。我们可以定义矢量及轴矢量变换,

$$q \rightarrow e^{-i\lambda^j \theta_V^j} q, \quad q \rightarrow e^{-i\lambda^j \theta_A^j \gamma_5} q, \quad (j = 1, \dots, N_f^2 - 1) \quad (2.10)$$

其中, $\theta_V = \theta_L = \theta_R$, $\theta_A = -\theta_L = \theta_R$ 。因此, 这些变换的关系可以表示为

$$\begin{aligned} U_L(N_f) \times U_R(N_f) &\simeq (U(1) \times SU(N_f))_L \times (U(1) \times SU(N_f))_R \\ &\simeq (U(1)_B \times U(1)_A) \times (SU(N_f)_V \times SU(N_f)_A) \end{aligned} \quad (2.11)$$

在量子层面上, $U(1)_B$ 对应重子数守恒, 对应味单态轴矢量转动的 $U(1)_A$ 对称性由于轴子反常被破坏^[25]。剩下的手征对称性中, $SU(N_f)_A$ 会自发性破缺掉, $SU(N_f)_V$ 为真空剩余的矢量变换对称性。在 $SU_L(N_f) \times SU_R(N_f)$ 变换下, 凝聚 $\bar{q}q \equiv \bar{q}_L q_R + \bar{q}_R q_L$ 不变, 因此可以作为手征相变的序参量, 如果 $\langle \bar{q}q \rangle \neq 0$, 则系统处于手征破缺相; 如果 $\langle \bar{q}q \rangle = 0$, 则手征对称性恢复, 这种情况通常在极高温下发生。

2.2.2 颜色禁闭

颜色禁闭理论用于解释实验中无法观测到自由的夸克或胶子。它指的是在较大尺度 (fm 量级) 下, 任何带颜色的粒子都无法自由存在, 必须相互结合为色中性的粒子。在 高能 (小尺度) 时由于渐近自由, 夸克胶子间的相互作用较弱; 在 低能 (大尺度) 时由于颜色禁闭, 夸克胶子间的相互作用变强。

与手征相变不同, 颜色禁闭与颜色对称群的中心对称子群 $Z(N_c)$ 有关, 其序参量可取 Wilson 圈算子及 Polyakov 圈算子的真空期待值, 若系统存在 $Z(N_c)$ 对称性, 则为禁闭相, 若对称破缺, 则为退禁闭相^[26]。

Wilson 圈算子是用来描述颜色禁闭的一个重要工具。其定义为

$$W[C] \equiv \text{Tr} \left[P \left(e^{ig \int_C A_\mu dx^\mu} \right) \right]. \quad (2.12)$$

其中 C 表示时空中的任意闭合回路， P 为排序算符，此定义在规范变换下不变。当 C 取为空间长度为 L 、时间长度为 T 的矩形回路时， $W[C]$ 的物理意义为在 t_0 时刻，一对空间距离为 L 的正反夸克对产生，并在 $t_0 + T$ 时刻湮灭的过程。在 T 趋于无穷的极限下，可以得到 Wilson 圈算子的真空期待值与夸克与反夸克之间的势能函数 $V(L)$ 的关系 $\langle W[C] \rangle \simeq e^{-V(L)T}$ ，当夸克被束缚时，势能函数 $V(L)$ 正比于空间距离 L ，^[27]

$$\langle W[C] \rangle \simeq e^{-\mathcal{O}(LT)} = e^{-\sigma A}. \quad (2.13)$$

其中 σ 是弦张力。这个行为被称为面积律。相反，当夸克解禁闭时，Wilson 圈算子的真空期待值则呈现出长度律的行为：

$$\langle W[C] \rangle \simeq e^{-\mathcal{O}(L)}. \quad (2.14)$$

Polyakov 圈算子是另一个用来描述颜色禁闭的关键工具。它的定义为

$$P[\vec{x}] \equiv \text{Tr} \left[\mathbf{T} \left(e^{ig \int_0^T A_t(\vec{x}, t) dt} \right) \right] \quad (2.15)$$

Polyakov 圈算子与 Wilson 圈算子的不同之处在于，前者考虑的是时间回路，其中 \mathbf{T} 表示时间排序算符。Polyakov 圈算子的真空期待值与单夸克自由能 F_q 的关系为 $\langle P(x) \rangle = e^{-F_q L t}$ 。当 $\langle P(x) \rangle = 0$ 时， F_q 趋向无穷，此时夸克被束缚，不存在自由的单夸克。而 $\langle P(x) \rangle \neq 0$ 则对应退禁闭相。

在实验方面，颜色禁闭可以通过强子谱的 Regge 行为得到验证，其表现是强子质量平方与角动量等量子数呈线性相关，在后续第四章中的软墙模型我们将继续介绍此性质^[28]。

2.3 相变

目前，我们已经讨论了在小尺度下的微扰理论和 QCD 渐近自由性质，以及在大尺度下的手征对称性破坏和颜色禁闭现象。从广义上看，随着尺度的改变，QCD 有着不同的手征对称性、出现颜色禁闭等行为，这意味着系统进入了不同的“相”。类似地，通过改变体系的温度和化学势，可以改变系统微观自由度之间相互作用的尺度，从而产生相变。^[29]

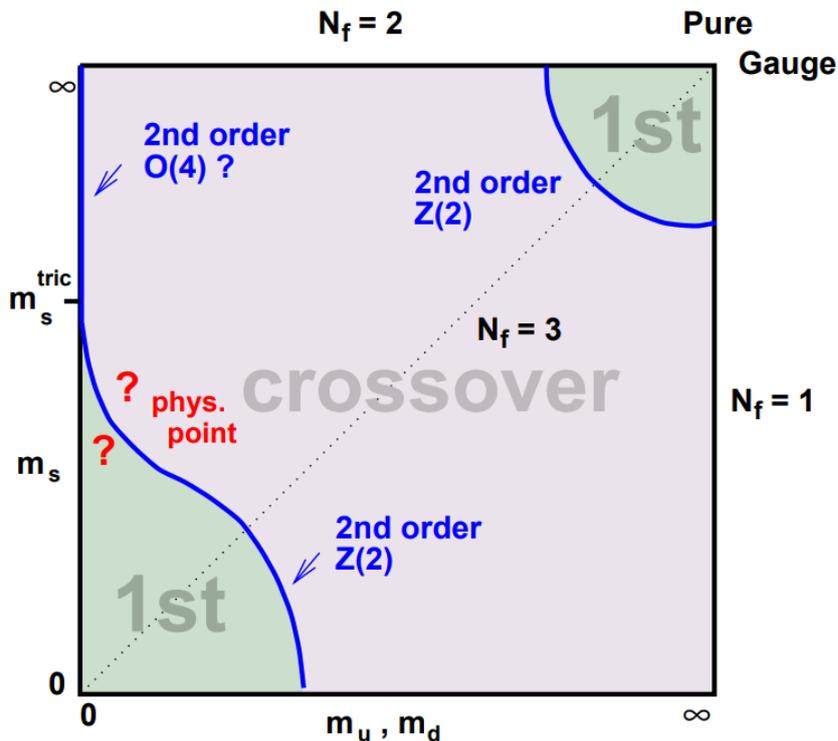


图 2.2 夸克流质量和夸克味道数对 QCD 相图的影响^[2]

根据前面的讨论，当夸克的味数 N_f 增大到使 QCD 理论的 β 为正时，渐近自由性质不再成立。另外在 $N_f = 0$ 的 $SU(N_c)$ 理论中，QCD 相变由 $Z(N_c)$ 对称性描述，当系统在低温时处于禁闭相态，在高温时对称性破缺，系统呈现退禁闭相态。因此，在 QCD 理论中，除了体系的温度和化学势等环境因素外，夸克味数 N_f 和流夸克质量 m_q 等内在属性也会影响相变过程。^[30]图 2.2展示了夸克质量和味数目对相变的影响^[2]。

对于环境因素，图 2.3半定量地给出了当前对 QCD 相图结构的理解^[3]。图

中横轴为重子化学势，竖轴为温度。可以看到，在高温低密区域，由于体系的特征尺度较小，系统为以夸克和胶子为基本自由度所构成的夸克胶子等离子体。随着温度降低，系统经历手征对称性破缺和颜色禁闭，逐渐转变为由较轻强子构成的强子相，这一路径也反映了宇宙的演化过程。在宇宙大爆炸的早期阶段（大爆炸后的 $10^{-5} \sim 10^{-4}$ s），宇宙处于 QGP 相态，随着宇宙持续膨胀，温度持续降低，夸克、胶子组合形成强子，宇宙进入强子相。在零重子化学势下，此相变为 crossover，当增加化学势时，可以观察到在相图右侧，QGP 相和强子气相之间的相变由 crossover 变为一阶相变。在一阶相变线上，两种相有着相等的自由能，相变发生时系统的物理量如熵密度和粒子数密度会出现不连续现象。在 crossover 和一阶相变线之间存在量子色动力学临界点，此时熵密度不连续性 Δs ，粒子数密度不连续性 $\Delta \rho$ 逐渐趋于 0，自由能的一阶导数连续但二阶导数不连续。临界点位置的确定和有限化学势下的 QCD 物态为目前粒子物理研究最重要的课题之一^[31]。最后在低温高密区域，系统将进入色超导相^[32,33]。

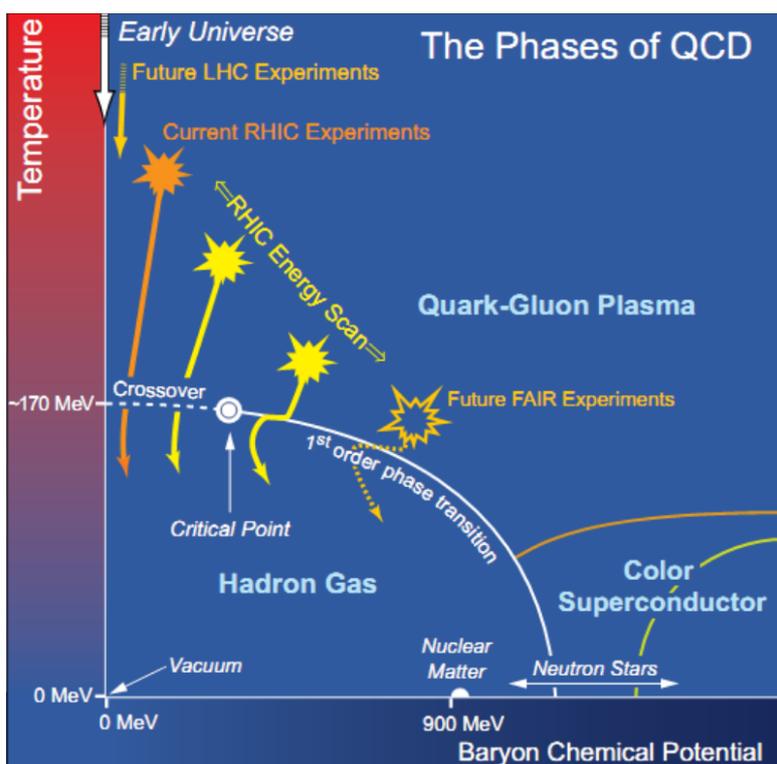


图 2.3 QCD 相图结构^[3]

在理论上，可以使用 QCD 微扰理论来描述极高温或极高密度区域。在低密有限温度区域，可以使用格点 QCD 来进行零密度区域的准确的第一性原理

计算，并通过对 μ/T 展开来预测低密度区域的临界点位置。^[34,35] 然而，随着化学势的增加，由于符号问题，格点 QCD 会失效。为了填补这一空白，人们提出了更多的有效模型，如袋模型^[36]、势模型^[37]、NJL 模型^[38] 和 PNJL 模型^[39,40] 等。

在实验方面，有 RHIC(Relativistic Heavy Ion Collider)、LHC(Large Hadron Collider)^[41] 等重离子碰撞试验，其基本原理是将带电原子核加速到接近光速后使其相互碰撞来产生极端高温、高密度的物质，此时强子中的夸克和胶子将解禁闭形成 QGP。目前实验中的喷柱淬火、集体流的组分夸克标度性及 J/Ψ 产额压低等现象间接证明了 QGP 的存在，且实验得到的粘滞系数与熵之比说明了 QGP 为强耦合的理想流体。^[42]

实验具体反应过程为：将金、铅原子核加速、碰撞后形成色玻璃凝聚，部分子相互作用形成色玻璃等离子体 (glasma)，随后分裂成轻夸克、胶子并形成夸克胶子等离子体。当达到相变温度时，其中带色的部分子会相互结合形成色中性的强子，形成强子气。这一过程对应图 2.3 中左边部分，即在低化学势下从高温冷却到低温的过程。

第3章 AdS/CFT 对偶

通过 AdS/CFT 对偶 (Anti-de Sitter/Conformal Field Theory, AdS/CFT), 人们能够利用经典引力理论及其数值方法来非微扰地研究强耦合规范场论, 目前被广泛应用于 QCD 理论、核物理、非平衡物理及凝聚态物理等领域。本章将对 AdS/CFT 对偶的研究背景、起源以及应用进行简要概述。

3.1 AdS/CFT 对偶起源

3.1.1 重整化群流视角下的 AdS/CFT 对偶

在强关联体系中, 高能集体粒子运动的规律可以通过有效粒子对应的低能有效理论来描述, 即通过积分掉我们不关心的短距离自由度, 得到有效理论。这个过程会引入新的自由度, 即系统的能标或特征长度。全息对偶建立了 d 维强关联量子场论与 $d+1$ 维黑洞视界动力学之间的对应关系, 引力理论中的额外维度将与场论的能标相对应。这一思想与重整化群的思想十分相似, 而重整化群方程可以描述不同能标下有效粒子间相互作用的参数值如何跑动^[43]。

考虑 d 维、格距为 a 的格点系统, 其哈密顿量为

$$H = \sum_{x,i} J_i(x) O_i(x). \quad (3.1)$$

其中, $O^i(x)$ 代表不同格点位置 x 上的不同算符, $J_i(x)$ 为对应的耦合常数或源。

考虑对体系进行粗粒化, 即将较小尺度上的格点进行平均, 合并为较大的格点, 并更新对应的耦合常数, 且在粗粒化后, 得到的有效哈密顿量的形式将保持不变。这一过程依赖于我们考虑的系统特征尺度 $u = 2na, (n = 1, 2, \dots)$, 耦合常数随 u 的变化由以下流方程描述

$$u \frac{\partial}{\partial u} J_i(x, u) = \beta_i(J_i(x, u), u). \quad (3.2)$$

如图 3.1所示，将不同特征尺度 u 下的格点体系堆叠到一起时，耦合系数 $J_i(x, u)$ 可以看作定义在 $d + 1$ 维空间上的一个动力学场。

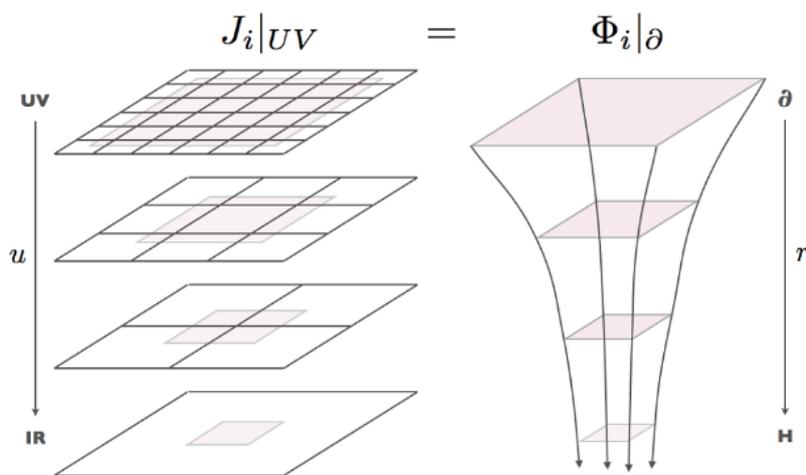


图 3.1 格点体系随特征尺度 u 进行粗粒化的过程^[4]

堆栈系统中新增的维度即对应全息坐标 r , r 的取值范围从紫外区域 ($z = a$) 到红外区域 $z \rightarrow \infty$, 对应系统特征尺度 u 不断增大的粗粒化过程。与源 $J_i(x)$ 对应的场为 $\Phi_i(x, r)$, 它们具有相同的荷、张量结构和其他量子数, 且满足 $\Phi_i(x, r = a) = J_i(x, a)$.

这个新的 $d + 1$ 维的堆栈系统为引力理论。因此对同一系统存在两种不同的描述, 其一是原始的 d 维格点系统, 其耦合常数 $J_i(x, u)$ 遵循 β 方程, 其二是 $d + 1$ 维的引力描述, 源 $J_i(x, u)$ 与高维场 $\Phi_i(x, r)$ 一一对应。因此, 我们可以通过引力理论来求解低维场论的流方程。

3.1.2 弦论视角下的 AdS/CFT 对偶

弦论中最基本的概念为弦, 其中弦长 l_s 等于普朗克长度, 其张力为 $T \equiv 1/(2\pi\alpha') = 1/(2\pi l_s^2)$ 。弦具有不同振动模式, 不同的振动模式对应着不同的基本粒子。弦的 Nambu-Goto 作用量为

$$S_{NG} = -T \int d^2\sigma \sqrt{-\det h_{\alpha\beta}}. \quad (3.3)$$

其中, $h_{\alpha\beta} = g_{MN}\partial_\alpha X^M\partial_\beta X^N$ 为世界面上的诱导度规, X^M ($M = 0, 1, \dots, d-1$) 为时空坐标, d 为时空维度, 玻色弦的时空维度为 26, 而超弦的时空维度为 10。

弦论包括玻色弦理论、I 型弦理论、II-A 型弦理论、II-B 型弦理论和混合弦理论等五种基本形式, 这些理论之间通过 S 对偶、T 对偶等相互联系。

弦具有两种形式: 开弦和闭弦。闭弦没有端点, 开弦的端点可以放在 D 膜上^[44]。如果对开弦中的 p 个方向采取 Neumann 边界条件 ($X^{\mu'} = 0$), 剩下的 $9-p$ 个方向采取 Dirichlet 边界条件 ($X^\mu = X_0^\mu$), 开弦的端点会被限制在 $p+1$ 维空间的物体上移动, 即 D_p 膜。在低能情况下, 由 Yang-Mills 理论描述连接于 D_p 膜上的开弦的动力学, 例如我们可以用 D3 膜去描述 4 维规范场论 QCD 理论。 D_p 膜为具有 p 维空间的物体, $p=0$ 时为点, $p=1$ 时为弦, $p=2$ 时为膜。在弦论框架下, 描述 D 膜动力学的作用量为^[45]

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{10}x \sqrt{-g} \left[e^{-2\phi} (R + 4\partial_M\phi\partial^M\phi) - \frac{g_s^2}{2(p+2)!} F_{p+2}^2 \right]. \quad (3.4)$$

其中, $2\kappa^2 = (2\pi)^7 g_s^2 l_s^8$ 为耦合常数, R 为时空的 Ricci 标量, ϕ 为伸缩子, $F_{p+2} = dA_{p+1}$ 为反对称场强张量。作用量在 Einstein 框架下为

$$S^E = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{10}x \sqrt{-g} \left[R - \frac{1}{2}\partial_M\phi\partial^M\phi - \frac{e^{-\frac{(p-3)\phi}{2}}}{2(p+2)!} F_{p+2}^2 \right]. \quad (3.5)$$

我们有两种方式去描述 D 膜, 其一是把 D 膜看作为开弦端点处设置 Dirichlet 边界条件的超曲面, 其二是超引力中带有守恒荷的 p 膜解。在低能极限下两种描述方式都会退化为两个无耦合系统的和, 其中一个系统在两种描述方式下都表现为自由超引力系统; 而另一个系统在不同的描述下表现为两种不同的理论, 一是大 N 极限下 $(3+1)$ 维时空中的 $\mathcal{N} = 4$ 的 $U(N)$ 超杨-米尔斯理论, 二是 $AdS_5 \times S^5$ 时空中的 IIB 型超弦理论。尽管这两种理论看似无关, 但由于它们实际上都是由 D 膜的低能极限推导而来, 因此它们是低能等价的。^[18]

另外, 在弦论中, 闭弦用于描述引力, 开弦用于描述规范理论, 因此弦论隐含了将引力理论和规范理论相互对偶的可能性, 我们将通过大 N_c 极限下对非阿贝尔规范理论的展开与对弦论的展开相比较阐述这种可能性^[46]。

3.1.2.1 弦论与强相互作用

考虑色数目为 N_c 的 $U(N_c)$ 非阿贝尔规范理论，其配分函数为：

$$Z_{\text{gauge}} = \int DA_\mu \exp\left(-\frac{1}{4g^2} \int d^4x \text{Tr} F^2\right) \quad (3.6)$$

这里的负号由欧式作用量引入， g 为耦合常数。耦合常数 g 和色数目 N_c 通过't Hooft 耦合常数联系在一起，

$$\lambda = g^2 N_c. \quad (3.7)$$

在大 N_c 极限下，我们保持't Hooft 耦合常数 λ 固定，真空振幅可以利用 $1/N_c$ 展开为

$$\log Z_{\text{gauge}} = \sum_{h=0}^{\infty} N_c^\chi f_h(\lambda) = N_c^2 f_0(\lambda) + f_1(\lambda) + \frac{1}{N_c^2} f_2(\lambda) + \dots \quad (3.8)$$

其中 $\chi = 2 - 2h$ 为欧拉示性数， h 为二维表面的孔数，因此 $f_0(\lambda)$ 是来自平面图的贡献， $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots$ 来自非平面图的贡献。

而弦论配分函数给出的真空振幅为

$$\ln Z_{\text{string}} = \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{1}{g_s}\right)^\chi \tilde{f}_h(l_s) = \frac{1}{g_s^2} \tilde{f}_0(l_s) + \tilde{f}_1(l_s) + g_s^2 \tilde{f}_2(l_s) \dots \quad (3.9)$$

其中 g_s 为弦耦合常数， l_s 为弦长。可以看出，两种理论的真空振幅的展开结构十分相似，我们提出假设 $Z_{\text{gauge}} = Z_{\text{string}}$ ，在此假设下，两个理论参数有以下对应关系

$$N_c^2 \sim \frac{1}{g_s^2} \sim \frac{1}{G}, \quad \lambda \sim l_s. \quad (3.10)$$

我们知道，弦论可以用于描述 4 维时空的强相互作用，但同时弦论的自洽性又要求高于 4 的维度，例如，对于玻色弦理论需要维度 $d=26$ ，对于包含费米子的 I 型弦论需要 $d=10$ 。为了解决这个冲突，需要引入弯曲时空背景的影响，

即，大 N_c 下的规范理论等价于 5 维弯曲时空的引力理论，描述 5 维弯曲时空的度规具有以下形式

$$ds_5^2 = \Omega(w)^2 (-dt^2 + dx_3^2) + dw^2. \quad (3.11)$$

其中， w 为额外的第五维坐标，由于 $\Omega(w)^2$ 只依赖于坐标 w ，所以度规具有 ISO(1,3) 对称性。

3.1.2.2 AdS/CFT 对偶

接下来我们利用更严格的约束，即标度不变性，来进一步推导大 N_c 下的规范理论与引力理论的对应关系并具体给出对偶的 5 维弯曲时空的度规。

标度不变性是指理论在以下变换下保持不变：

$$x^\mu \rightarrow ax^\mu, \quad x^\mu = (t, x_3) = (t, x, y, z). \quad (3.12)$$

其中，共形场论满足以上对称性。

在经典层面上，规范场满足标度不变性。但在量子层面上，重整化引入的能标依赖破坏了标度不变性。如果要维持理论的标度不变性，需要额外加入合适的物质场来保证

$$\beta(g_{\text{YM}}) = \mu \frac{dg_{\text{YM}}}{d\mu} = 0. \quad (3.13)$$

特别的，对于 $N = 4$ 的超对称杨-米尔斯 (Super-Yang-Mills, SYM) 理论，其作用量为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g_{\text{YM}}^2} \text{tr} \left[-\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^2 - (D_\mu \phi_i)^2 - i \bar{\lambda}_I \gamma^\mu D_\mu \lambda^I + O(\phi^4) + O(\lambda \lambda \phi) \right]. \quad (3.14)$$

其中，前三项分别为规范场 A_μ ，标量场 ϕ_i 和 Weyl 费米子场 λ_I 的动能项。该作用量在经典和量子层面上都能保证标度不变性，例如，在量子层面上，1 圈图

给出的 β 函数为

$$\beta(g_{\text{YM}}) = -\frac{g_{\text{YM}}^3}{48\pi^2} N_c \left(11 - 2n_f - \frac{1}{2}n_s \right). \quad (3.15)$$

其中 n_f 为 Weyl 费米子的数量, n_s 为实标量场的数量, $N = 4$ 的 SYM 场包含规范场 A_μ 、6 种标量场 ϕ_i 和 4 种 Weyl 费米场 λ_I , 因此 $n_f = 4, n_s = 6$, 可以得出上式为 0, 即耦合常数 g_{YM} 不依赖于能标, 理论具有标度不变性。

对于弯曲时空, 度规 (公式 3.11) 的标度不变性要求

$$\Omega(w)^2 \rightarrow a^{-2}\Omega(w)^2. \quad (3.16)$$

满足这种变换的度规为

$$ds_5^2 = \left(\frac{r}{L}\right)^2 (-dt^2 + dx_3^2) + L^2 \frac{dr^2}{r^2}. \quad (3.17)$$

这正是 5 维反德西特时空 (AdS_5) 的度规, L 即 AdS 半径。至此, 我们通过要求规范理论与引力理论都具有标度不变性得到了一种具体的对应关系, 规范场论给出了 $N = 4$ 的超对称杨-米尔斯, 引力理论给出了 AdS 弯曲时空。

进一步可以推广可以得到, 共形场论和 AdS 引力理论给出的配分函数是等价的^[47,48],

$$Z_{\text{CFT}} = Z_{\text{AdS}}. \quad (3.18)$$

但值得注意的是, 上式给出了共形场论的引力对偶, 但 QCD 理论却显然并不具有共形对称性。因此在 AdS/QCD 模型中, 我们需要额外引入伸缩子场 ϕ 来打破共形对称性, 或者从引力对偶出发, 由形变后的 AdS 时空得到不具有共形对称性的场论^[49]。

3.2 全息对偶字典

由上一章的引力与场论的配分函数的等价关系 (公式 3.18), 我们得到

$$Z_{\text{bulk}} [\Phi(\vec{x}, z)|_{z=0} = \phi(\vec{x})] = \left\langle e^{\int d^d x \phi(\vec{x}) \mathcal{O}(\vec{x})} \right\rangle_{\text{CFT}}, \quad (3.19)$$

其中, Φ 为 bulk 中的场, 边界共形场 ϕ 对应边界共形场算符 \mathcal{O} 。

当引力理论为弱耦合时, 可近似为经典的

$$Z_{\text{bulk}} \simeq e^{-N^2 S_{\text{class}}[\Phi] + O(\alpha')} + O(g_s), \quad (3.20)$$

其中, S_{class} 为经典作用量, 对 bulk 的配分函数贡献最大的是 S_{class} 的最小值, 即满足运动方程的经典解。其 n 点函数为

$$\langle \mathcal{O}(x_1) \cdots \mathcal{O}(x_n) \rangle = \frac{\delta^{(n)} S_{\text{grav}}^{\text{ren}}[\Phi]}{\delta \phi(x_1) \cdots \delta \phi(x_n)} \Big|_{\phi=0}. \quad (3.21)$$

在全息对偶字典中, 引力理论长在 $d+1$ 维上, 而场论长为 d 维上, 相差的一个维度 z 对应场论的能标。全息对偶提供了一条全新的路径去理解强相互作用理论, 即通过理解其对偶的经典引力理论。

3.2.1 标量场

引入一个质量为 m 的自由标量场 $\Phi(X)$, 背景时空 \mathcal{M} 为 AdS_{d+1} , 其作用量为

$$S = -\frac{1}{2} \int d^{d+1} X \sqrt{g} (g^{MN} \partial_M \Phi \partial_N \Phi + m^2 \Phi^2), \quad (3.22)$$

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} (dz^2 + dx^2).$$

其中, R 为 AdS 半径, $dx^2 = -dt^2 + dx_3^2$, 运动方程为

$$\nabla_M \nabla^M \Phi - m^2 \Phi = 0. \quad (3.23)$$

将运动方程代入作用量得到在壳作用量为

$$S_{\text{on-shell}} = \frac{1}{2} \int_{\partial\mathcal{M}} d^d y \sqrt{\gamma} \Phi n^M \partial_M \Phi \quad (3.24)$$

其中, n^M 为垂直于边界 $\partial\mathcal{M}$ 的单位向量, γ 为边界上诱导度规的行列式, y 为边界上的坐标。

对 $\Phi(X)$ 做傅里叶分解 $\Phi(z, x^\mu) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ik \cdot x} \Phi(z, k)$, 代入运动方程中得到

$$z^2 \partial_z^2 \Phi(z, k) + (1-d)z \partial_z \Phi(z, k) - (m^2 R^2 + k^2 z^2) \Phi(z, k) = 0, \quad (3.25)$$

其中 $k^\mu = (\omega, \vec{k})$, $k^2 = -\omega^2 + \vec{k}^2$, $k \cdot x = \eta_{\mu\nu} k^\mu x^\nu$. 在 AdS_{d+1} 边界, 即径向坐标 $z \rightarrow 0$ 时, 取 $\Phi \sim z^\beta$, 运动方程变为

$$\beta(\beta-1) + (1-d)\beta - m^2 R^2 = 0, \quad (3.26)$$

解得方程的两个解 $\beta_1 = d - \Delta$, $\beta_2 = \Delta$, 因此 $\Phi(X)$ 在边界上有以下渐进行为

$$\begin{aligned} \Phi(z, k) &= A(k)z^{d-\Delta} + B(k)z^\Delta, \quad z \rightarrow 0, \\ \Phi(z, x) &= A(x)z^{d-\Delta} + B(x)z^\Delta, \quad z \rightarrow 0, \\ \Delta &\equiv \frac{d}{2} + \nu, \quad \nu \equiv \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2 R^2}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

如果 $m^2 > 0$, 有 $d-\Delta < 0$, 这会导致 Φ 发散。为了得到有限值, 我们定义源为 $\phi(x) = \lim_{z \rightarrow 0} z^{\Delta-d} \Phi(z, x)$ 。

接下来对作用量进行重整化^[50], 将解 (3.27) 代回在壳作用量, 在 $z = \epsilon \rightarrow 0$ 时有,

$$S = \frac{1}{2} R^{d-1} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} [\epsilon^{-2\nu} (d-\Delta) A(-k) A(k) + d A(-k) B(k)]. \quad (3.28)$$

上式第一项即为发散项。为了去除发散我们需要添加一项局部抵消项, 抵消项

正比于 $\int_{\partial AdS} d^d x \sqrt{\gamma} \Phi^2(\epsilon, x)$.

$$S_{ct} = -\frac{1}{2}(d - \Delta)R^{d-1} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} [\epsilon^{-2\nu} A(-k)A(k) + 2A(-k)B(k)]. \quad (3.29)$$

引入边界条件 $A(k) = \phi(k)$ 后, 重整后的作用量为

$$S^{(R)} = \frac{1}{2}R^{d-1}(2\Delta - d) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \chi(k)\phi(k)\phi(-k). \quad (3.30)$$

其中 $\chi(k) = B(k)/A(k)$ 为比例系数。边界共形场算符 \mathcal{O} 的期待值为

$$\langle \mathcal{O}(k) \rangle_\phi = \frac{\delta S^{(R)}[\Phi_c]}{\delta \phi(-k)} = (2\Delta - d)\chi(k)\phi(k) = 2\nu\chi(k)\phi(k) = 2\nu B(k). \quad (3.31)$$

两点函数为

$$G_E(k) = 2\nu \frac{\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{k}{2}\right)^{2\nu}. \quad (3.32)$$

其中, $\Gamma(\nu)$ 为伽马函数。变换到位形空间后可得

$$G_E(x) = \langle \mathcal{O}(x)\mathcal{O}(0) \rangle \sim \frac{1}{|x|^{2\Delta}}. \quad (3.33)$$

类似地, 可以得到相互作用下标量场的多点函数, 有相互作用的标量场作用量为

$$S[\Phi] = \int d^d x dz \sqrt{g} \left[-\frac{1}{2} (g^{MN} \partial_M \Phi \partial_N \Phi + m^2 \Phi^2) - \sum_{n \geq 3} \frac{\lambda_n}{n!} \Phi^n \right], \quad (3.34)$$

对于 $n \geq 3$ 的高点函数^[51]

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}(\mathbf{x}_1) \dots \mathcal{O}(\mathbf{x}_n) \rangle_{\text{con}} &= \lambda_n c_\Delta^n I_n(\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_n), \\ I_n(\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_n) &= \int d^d x dz \frac{z^{-(d+1)+n\Delta}}{[(z^2 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}'_1)^2) \dots (z^2 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}'_n)^2)]^\Delta}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

3.2.2 矢量场

与标量场情况中源 ϕ 与算符 \mathcal{O} 耦合的方式 $\int d^d x \phi \mathcal{O}$ 类似, 矢量场 A_μ 与 J^μ 耦合后为 $\int d^d x A_\mu J^\mu$. 由全息词典

$$e^{-S_{\text{grav}}} \equiv \left\langle e^{\int d^d x J_j(\mathbf{x}) A_{0,j}(\mathbf{x})} \right\rangle_{\text{CFT}}, \quad (3.36)$$

其中, 矢量场的作用量可表示为

$$S = \int d^{d+1} x \sqrt{g} \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu \right). \quad (3.37)$$

A_0 的运动方程为

$$[z^2 \partial_\mu \partial_\mu + (1-d)z \partial_0 - (m^2 - d + 1)] A_0 = 0, \quad (3.38)$$

类似标量场的情况, 满足上式且在 $z \rightarrow \infty$ 处不发散的解为

$$A_0(z, x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} z^{\frac{d}{2}} a_0(\mathbf{k}) K_{\tilde{\alpha}}(kz), \quad (3.39)$$

$$\tilde{\alpha} = \sqrt{\frac{d^2}{4} + \tilde{m}^2} = \sqrt{\frac{(d-2)^2}{4} + m^2}, \quad \tilde{\Delta} = \frac{d}{2} + \tilde{\alpha}.$$

其中, K 为修正贝塞尔函数。

引入标架, 将全局坐标转换为局域坐标, $\tilde{A}_a = e_a^\mu A_\mu = z A_a$. 由傅里叶变换后的运动方程及 $F^{\mu\nu}$ 的反对称性可得 A_i 需满足

$$z^2 \partial_z^2 \tilde{A}_i(z, k) - z^2 k^2 \tilde{A}_i(z, k) + (1-d)z \partial_z \tilde{A}_i(z, k) - \tilde{m}^2 \tilde{A}_i = -2izk_i \tilde{A}_0(z, k) \quad (3.40)$$

其中, $k_i k_i = k^2$. 方程的通解为

$$\tilde{A}_i(z, x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} z^{\frac{d}{2}} \left(a_i(\mathbf{k}) K_{\tilde{\alpha}}(kz) + i a_0(\mathbf{k}) \frac{k_i}{k} x_0 K_{\tilde{\alpha}+1}(kz) \right) \quad (i = 1, 2, \dots, d). \quad (3.41)$$

在 $z = \epsilon \rightarrow 0$ 处引入抵消项, 得到重整化后的作用量为

$$S^{(R)} = \frac{1}{2} \int d^d x \epsilon^{-d} \tilde{A}_{\epsilon,i} [-\tilde{A}^{\epsilon,i} + \epsilon \tilde{F}^{\epsilon,0i}], \quad (3.42)$$

两点函数为^[52,53]

$$\begin{aligned} \langle J_i(\mathbf{x}) J_j(\mathbf{y}) \rangle &= \frac{2\tilde{c}\tilde{\alpha}\tilde{\Delta}}{\tilde{\Delta}-1} \left(\delta_{ij} - 2 \frac{(x-y)_i(x-y)_j}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} \right) |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-2\tilde{\Delta}}, \\ \tilde{c} &= \frac{\Gamma(\tilde{\Delta})}{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\tilde{\alpha})}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

通过解不同形式的场的运动方程我们可以得到其他的共形维度, 例如, 旋量场的共形维度为 $\Delta = \frac{1}{2}(d + 2mL)$, p-形场的共形维度为 $\Delta = \frac{1}{2} \left(d + \sqrt{(d-2p)^2 + 4m^2L^2} \right)$ 。此外, 还存在对应关系, 如能动张量 $T^{\mu\nu}(x)$ 对应引力子 $g_{\mu\nu}(z, x)$, 从而使 $T^{\mu\nu}(x)g_{\mu\nu}(z, x)$ 为一个标量。以上全息对偶字典可以用于计算全息 QCD, 比如, 引力场中的矢量场 A_M 在场论边界上的值给出了 QCD 中的化学势。

第 4 章 全息 QCD 模型

AdS/CFT 对偶在求解 QCD 介子谱、重子谱、胶球谱及夸克-胶子等离子体问题展现了作为计算强耦合系统的新方法的巨大潜力。虽然 QCD 并不是共形场论，但可以通过对 AdS 时空进行适当的变形从而得到非共形场论的信息。除了 QCD 以外，全息对偶理论还被用于计算凝聚态的相关问题，如超导、超流等。

全息 QCD 模型的建立主要通过自上而下 (top-down) 和自下而上 (bottom-up) 两种方法。自上而下指从上层基本理论出发，如超弦理论，通过引入合适的对称性破坏机制来破坏超对称性，从而得到有效理论。使用这一方法的模型有 Saki-Sugimoto 模型^[54,55]、 $D_3 - D_7$ 模型^[56]、 $D_4 - D_6$ 模型^[57] 等。自下而上指从 QCD 理论的性质和已知的低能现象出发，根据其对称性，和 Regge 轨迹、QCD 状态方程 (Equations of state, EoS)、手征对称自发破缺、线性禁闭等性质来构造有效模型。接下来，我们将详细介绍一些采用自下而上方法构建的两种全息模型。

4.1 硬墙模型

硬墙模型的作用量及度规为^[58]

$$\begin{aligned}
 S &= \int d^5x \sqrt{-g} \text{Tr} \left(|DX|^2 + 3|X|^2 + \frac{1}{4g_5^2} (F_L^2 + F_R^2) \right), \\
 ds^2 &= \frac{L^2}{z^2} (-dt^2 + dz^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2), \\
 D_M X &= \partial_M X - iA_M^L X + iX A_M^R, \quad A_{L,R} = A_{L,R}^a t^a, \\
 F_{L,R}^{MN} &= \partial^M A_{L,R}^N - \partial^N A_{L,R}^M - i [A_{L,R}^M, A_{L,R}^N].
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

其中， X 为标量场，对应 4 维 QCD 理论中的 $\bar{q}_R^\alpha q_L^\beta$ 。 A_L, A_R 分别为左右手规范场，分别对应 QCD 中的 $\bar{q}_L \gamma_\mu t^a q_L, \bar{q}_R \gamma_\mu t^a q_R$ 。度规满足 $SO(2, 4)$ 对称性，为了让对称性破缺，我们需要设置截断，在径向坐标 z 上设置两个边界条件：

IR 处有 $z = z_m$ 。UV 处有 $z = \epsilon \rightarrow 0$ 。

考虑到 QCD 的全局手征对称性 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ ，我们引入了 5d 下的局域规范场 A_L, A_R ，其在 UV 边界处为对应的 4d 场论中 $SU(2)$ 流 J_L, J_R 的源。我们取

$$X = \begin{pmatrix} \frac{\chi(z)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\chi(z)}{2} \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

代入作用量中，可以得到 χ 部分的作用量，对作用量进行变分并对 χ 做傅里叶分解后，场 χ 的作用量及运动方程为

$$\begin{aligned} S_\chi &= -\frac{1}{2} \int d^5x \sqrt{-g} (\partial_m \chi \partial^m \chi + 3\chi^2), \\ \partial_z (z^{-3} \partial_z \chi(z, q)) + \frac{3 + z^2 q^2}{z^2} \chi(z, q) &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

在 $z \rightarrow 0$ 时可以得到运动方程的解为 $\chi(z) = c_1 z + c_3 z^3$ 。将解代回作用量得到在壳作用量为

$$S_{\text{on-shell}} \sim \int d^4q [z^{-3} \chi(z, q) \partial_z \chi(z, q)] \Big|_{z=\epsilon} \sim \int d^4q c_1 c_3, \quad (4.4)$$

根据全息对偶字典，4 维场论的生成泛函等价于 5 维引力的在壳作用量：

$$W_{4D}[\phi_0(x)] = S_{5D, \text{eff}}[\phi(x, \epsilon)], \quad \phi(x, \epsilon) = \phi_0(x). \quad (4.5)$$

因此，如果 c_1 正比于夸克质量 m_q ，那么在壳作用量对其的微分正比于夸克凝聚，即 $c_3 \sim \langle \bar{q}^\alpha q^\beta \rangle \equiv \sigma$ 。并且在 $c_1 \rightarrow a c_1, c_3 \rightarrow c_3/a$ 变换下 (a 为变换参数)， $\chi(z) = a c_1 z + \frac{c_3}{a} z^3$ ，关系依然成立。对在壳作用量 (4.3) 二次微分后得到算符 $\bar{q}q$ 的两点函数为

$$\langle \bar{q}q(q) \bar{q}q(0) \rangle = \frac{a^2}{2} q^2 \log(q^2 L^2) + \dots, \quad (4.6)$$

与 QCD 给出的两点函数领头阶 $\langle \bar{q}q(q) \bar{q}q(0) \rangle = \frac{N_c}{8\pi^2} q^2 \log(q^2/\mu^2)$ 对比得出

变换参数 $a = \sqrt{N_c}/(2\pi)$.

接下来, 我们考虑模型中 QCD 手征对称自发破缺的机制并定出规范耦合常数 g_5 。由于自发破缺机制, $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 会破缺剩下 $SU(N)_V$. 引入矢量场 $V \equiv (A_L + A_R)/2$ 和轴矢量场 $A^\mu \equiv (A_L^\mu - A_R^\mu)/2$, 其运动方程分别为

$$\begin{aligned} \partial_z (z^{-1} \partial_z V_\mu(q, z)) + z^{-1} q^2 V_\mu(q, z) &= 0, \\ \partial_z (z^{-1} \partial_z A_\mu(q, z)) + z^{-1} q^2 A_\mu(q, z) + z^{-2} g_5^2 \chi^2 A_\mu(q, z) &= 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

对比可得, 轴矢量场 A^μ 的运动方程多出正比于标量场 χ 的一项, 这将导致 ρ 介子质量和 a_1 介子质量劈裂。在 $V_z(q, z) = 0$ 的规范下, 矢量介子 ρ 介子的横向分量 V_z 的运动方程为

$$\left[d_z \left(\frac{1}{z} d_z V_\mu^a(q, z) \right) + \frac{q^2}{z} V_\mu^a(q, z) \right]_{\perp} = 0. \quad (4.8)$$

将满足上式的解代入作用量中可以得到在壳作用量为 $S_{\text{on-shell}} = -\frac{1}{2g^2} \int d^4x \left(\frac{1}{z} V_\mu^a d_z V^{\mu a} \right)_{z=c}$. 在大欧式动量区域 ($Q^2 = -q^2$), $S_{\text{on-shell}}$ 对源 V_0 二次微分后得到对应矢量流的两点函数为

$$\begin{aligned} \int_x e^{iqx} \langle J_\mu^a(x) J_\nu^b(0) \rangle &= \delta^{ab} (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \Pi_V(Q^2), \\ \Pi_V(Q^2) &= -\frac{1}{2g_5^2} \ln Q^2. \end{aligned} \quad (4.9)$$

对比 QCD 计算给出的 $\Pi_V(Q^2) = -\frac{N_c}{24\pi^2} \ln Q^2$, 可以得到规范耦合常数 $g_5^2 = \frac{12\pi^2}{N_c}$.

最后, 我们使用该模型计算衰变常数与介子质量。首先我们求解 V_μ 的运动方程 (4.7), 解的一般形式为 $V_n(q, z) = V_\mu^{(0)}(q)V(q, z)$, 代入运动方程

$$z \partial_z (z^{-1} \partial_z V(z)) + q^2 V(z) = 0. \quad (4.10)$$

并限制满足边界条件 $V_n(z=0) = 0$, $\partial_z V_n(z=z_m) = 0$, 对应本征函数 $V_n(z)$ 的离散本征值满足 $q^2 = m_n^2$. 根据本征函数的完备性和归一化, 可以得到对应上式

的格林函数

$$G(z, z') = \sum_n \frac{V_n(z)V_n(z')}{q^2 - m_n^2}. \quad (4.11)$$

根据这个方程可以得到

$$\begin{aligned} V(z') &= \int dz V(z)\delta(z - z') \\ &= z^{-1} \sum_n \frac{V'_n(\epsilon)V_n(z')}{q^2 - m_n^2}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

将运动方程的解 $V(q, z)$ 代回作用量得到在壳作用量, 在壳作用量对 $V_\mu^{(0)}$ 二阶微分后可得流流关联函数

$$\langle J_\mu(q)J_\nu(0) \rangle = -\frac{1}{g_5^2 q^2} (q^\mu q^\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \times \left(\sum_n \frac{(z^{-1}V'_n(\epsilon))^2}{q^2 - m_n^2} \right). \quad (4.13)$$

对于极化为 ϵ_μ 的 ρ 介子, 衰变常数 F_ρ 定义为 $\langle 0 | J_\mu^a | \rho^b \rangle = F_\rho \delta^{ab} \epsilon_\mu$, 即

$$F_{\rho_n}^2 = \frac{1}{g_5^2} (z^{-1} \partial_z V_n |_\epsilon)^2. \quad (4.14)$$

此外, 硬墙模型还可以计算得到其他物理量, 考虑轴矢量介子的二阶作用量为

$$S = \int d^5x \left[-\frac{1}{4g^2 z} F_A^a F_A^a + \frac{v(z)^2}{2z^3} (d\pi^a - A^a)^2 \right]. \quad (4.15)$$

其中, $v(z) = m_q z + \sigma z^3$, $A = (A_L - A_R)/2$, $X = X_0 \exp(i2\pi^a t^a)$ 。取规范 $A_z = 0$, 分解场为 $A_\mu = A_{\mu\perp} + d_\mu \varphi$, 得到运动方程

$$\begin{aligned} \left[d_z \left(\frac{1}{z} d_z A_\mu^a \right) + \frac{q^2}{z} A_\mu^a - \frac{g^2 v^2}{z^3} A_\mu^a \right]_\perp &= 0, \\ d_z \left(\frac{1}{z} d_z \varphi^a \right) + \frac{g^2 v^2}{z^3} (\pi^a - \varphi^a) &= 0, \\ -q^2 d_z \varphi^a + \frac{g^2 v^2}{2} d_z \pi^a &= 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

类似 ρ 介子衰变常数的定义 (4.14), 可以得到轴矢量介子的衰变常数。此外还可以计算得到

$$f_\pi^2 = - \frac{1}{g^2} \frac{d_z A(0, z)}{z} \Big|_{z=\epsilon}, \quad (4.17)$$

其中, $A(0, z)$ 为满足 $q^2 = 0$ 及边界条件 $A'(0, z_m) = 0$, $A(0, \epsilon) = 1$ 的运动方程 (4.16) 的解。

硬墙模型虽然只有三个自由参数 m_q 、 σ 、 z_m , 但与实验测量结果符合得很好。在硬墙模型的基础上还可以进一步改进, 如加入弦理论方面的物理效应、考虑 QCD 耦合常数的跑动等。此外, 硬墙模型无法描述 Regge 行为, 而 Regge 行为反应了 QCD 物理的基本性质之一, 颜色禁闭。为了解决这个问题, 人们提出了软墙模型, 其在硬墙模型的基础上改进并解释了 QCD 线性禁闭现象^[5,59,60]。

4.2 软墙模型

在此基础上, 人们进一步提出了软墙模型, 与硬墙模型的“硬”截断 $0 < z < \infty$ 相比, 软墙模型引入了伸缩子场 $\phi(z) = \mu^2 z^2$ 。模型作用量为^[5]

$$S = \int d^5 x e^{-\phi(z)} \sqrt{g} \left\{ -|DX|^2 + 3|X|^2 - \frac{1}{4g_5^2} (F_L^2 + F_R^2) \right\}. \quad (4.18)$$

类似之前的过程, 我们可以得出满足限制条件 $V(q, \epsilon) = 0$, $\partial_z V_n(z = z_m) = 0$ 的本征函数 $V_n(z)$ 对应的运动方程

$$\partial_z (z^{-1} e^{-\phi} \partial_z V_n(z)) + m_n^2 V_n(z) = 0. \quad (4.19)$$

通过变换 $V_n(z) = e^{\phi/2} \sqrt{z} v_n(z)$ 得到

$$-v_n''(z) + \left(\frac{1}{4} (A' - \phi')^2 + \frac{1}{2} (A'' - \phi'') \right) v_n'(z) = m_n^2 v_n(z). \quad (4.20)$$

通过取特定的 $B = \Phi - A = z^2 + \log z$, 此方程可以严格求解得到本征值为

$$E = 4n + 2m + 2. \tag{4.21}$$

$m = 1$ 时有

$$m_n^2 = 4(n + 1). \tag{4.22}$$

得到 $m_n^2 \propto n$, 满足介子的 Regge 谱, 结果如图 4.1 所示

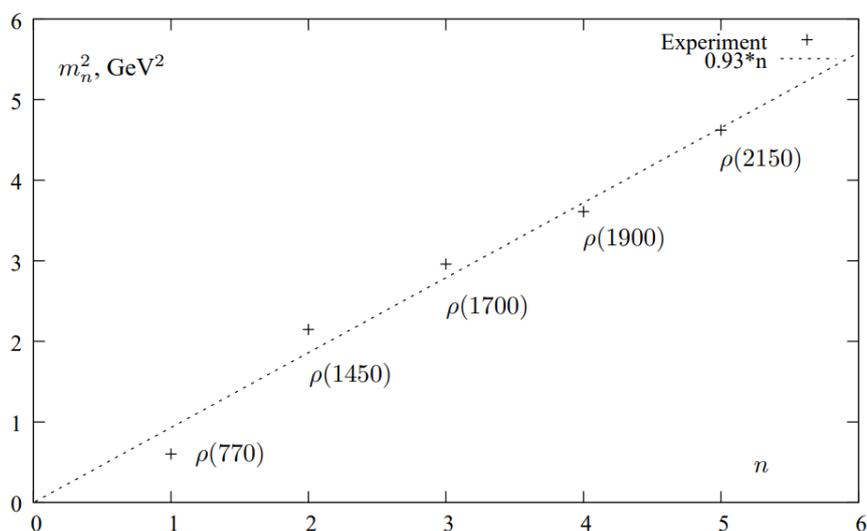


图 4.1 ρ 介子线性谱^[5]

软墙模型虽然在硬墙模型的基础上进行了改进, 但仍有不足: 模型忽略了伸缩子场对时空度规的作用。在此基础上, 人们进一步考虑了伸缩子场对度规的影响, 引入引力-伸缩子场 (Gravity-Dilaton) 的耦合系统, 并加入 Maxwell 规范场, 此即 EMD(Einstein-Maxwell-Dilation) 模型, 在下章中我们将对 EMD 模型进行详细介绍。

第 5 章 EMD 模型与 QCD 相图

在之前的章节中我们简要回顾了通过自下而上方法构建的两种有效全息 QCD 模型，在本章，我们将详细介绍 EMD 模型，并利用 EMD 模型来计算边界场论的热力学，从而探究 QCD 的相图结构。

5.1 EMD 模型

在 Einstein-Dilation 模型的基础上，EMD 模型引入了 U(1) 规范场^[49,61]，根据全息字典，新引入的规范场对偶于磁场和化学势。这里我们考虑重子数化学势的影响，其对应规范场的第 0 分量 A_t 的边界展开系数。引入规范场 $A_\mu = (A_t, A_x, A_y, A_z) = (A_t, 0, 0, 0)$ 。

EMD 模型的 5 维作用量为

$$S = \frac{1}{2\kappa_N^2} \int d^5x \sqrt{-g} \left[\mathcal{R} - \frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - \frac{Z(\phi)}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - V(\phi) \right], \quad (5.1)$$

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu, \quad A_t = A_t(r), \quad \phi = \phi(r).$$

其中有效牛顿常数为 $\kappa_N^2 = \kappa_5^2 = 8\pi G_5$ ， g 为背景度规的行列式。 ϕ 为伸缩子场 A_μ 为规范场， $F_{\mu\nu}$ 为规范场 A_μ 对应的场强张量，其对偶于重子数流。伸缩子场 ϕ 的引入打破了共形对称性（QCD 理论不具有共形对称性），规范场 A_μ 引入了重子数。我们假设作用量中的标量场 ϕ 和规范场 A_t 只依赖于径向坐标 r 。 $V(\phi)$ 和 $Z(\phi)$ 分别为势能函数和规范场的耦合函数，其中， $V(\phi)$ 描述了伸缩子场 ϕ 间的相互作用， $Z(\phi)$ 耦合了伸缩子场 ϕ 和规范场 A_μ 。我们取背景时空为

$$ds^2 = -f(r)e^{-\eta(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\mathbf{x}_3^2, \quad (5.2)$$

$$d\mathbf{x}_3^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

我们取 $f(r) = 0$ 处为黑洞视界，记为 r_h 。在边界处 ($r \rightarrow \infty$)，度规满足渐进 AdS 条件，即 $f(r \rightarrow \infty) = r^2$ 且 $\eta(r \rightarrow \infty) = 0$ 。其中，我们取 AdS 的半径为 1，

宇宙学常数为 $\Lambda = -6$.

由模型作用量及度规可以看出，模型在以下两种变换下保持不变，

$$\begin{aligned} (1) \quad & t \rightarrow \lambda_t t, \quad e^\eta \rightarrow \lambda_t^2 e^\eta, \quad A_t \rightarrow \lambda_t^{-1} A_t, \\ (2) \quad & r \rightarrow \lambda_r r, \quad f \rightarrow \lambda_r^2 f, \quad A_t \rightarrow \lambda_r A_t. \end{aligned} \quad (5.3)$$

这两种对称性将便于我们进行后续计算。

通过与格点数据拟合来固定模型的自由度后，我们可以得到模型的势能函数 $V(\phi)$ 、耦合函数 $Z(\phi)$ 及其余模型参数

$$\begin{aligned} V(\phi) &= -12 \cosh [c_3 \phi] + \left(6c_3^2 - \frac{3}{2} \right) \phi^2 + c_4 \phi^6, \\ Z(\phi) &= \frac{1}{1+c_0} \operatorname{sech} [c_1 \phi^3] + \frac{c_0}{1+c_0} e^{-c_2 \phi}, \\ c_0 &= 1.7877, \quad c_1 = 0.1050, \quad c_2 = 30.2054, \quad c_3 = 0.7055, \quad c_4 = 0.0038, \\ \phi_s &= 1080 \text{MeV}, \quad \kappa_N^2 = (2\pi)1.76, \quad b = -0.2554. \end{aligned} \quad (5.4)$$

其中 ϕ_s 为场 ϕ 的 UV 展开系数，可以看作外源， b 是重整化时出现的参数。当 $r \rightarrow \infty$ 时，背景时空会渐进近似为 AdS 时空，同时势能函数 $V(\phi)$ 、耦合函数 $Z(\phi)$ 有以下渐进行为，

$$\begin{aligned} V(\phi) &= -12 - \frac{3}{2} \phi^2 + \mathcal{O}(\phi^4), \\ Z(\phi) &= 1 + \mathcal{O}(\phi). \end{aligned} \quad (5.5)$$

可见，势能函数的常数项贡献了宇宙学常数项。

5.2 运动方程及边界展开

由前面给出的作用量可以得到以下运动方程

$$\begin{aligned}
 c\nabla_{\mu}\nabla^{\mu}\phi - \frac{\partial_{\phi}Z}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \partial_{\phi}V &= 0, \\
 \nabla^{\nu}(ZF_{\nu\mu}) &= 0, \\
 \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi + \frac{Z}{2}F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^{\rho} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\nabla_{\mu}\phi\nabla^{\mu}\phi - \frac{Z}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - V\right)g_{\mu\nu}.
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

在 $A_t = A_t(r)$, $\phi = \phi(r)$ 假设下, 运动方程可以化简为

$$\begin{aligned}
 \phi'' + \left(\frac{f'}{f} - \frac{\eta'}{2} + \frac{3}{r}\right)\phi' + \frac{\partial_{\phi}Z}{2f}e^{\eta}A_t'^2 - \frac{1}{f}\partial_{\phi}V &= 0, \\
 \partial_r(e^{\eta/2}r^3ZA_t') &= 0, \\
 \frac{\eta'}{r} + \frac{1}{3}\phi'^2 &= 0, \\
 \frac{2f'}{rf} - \frac{\eta'}{r} + \frac{Z}{3f}e^{\eta}A_t'^2 + \frac{2}{3f}V + \frac{4}{r^2} &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

上式中的 ∂_{ϕ} 表示泛函对场 ϕ 求导, 其余导数均为对径向坐标 r 求导。由 A_t 的运动方程可以得到以下守恒荷

$$\frac{d\rho_B}{dr} = 0 \quad \text{with} \quad \rho_B = \frac{1}{2\kappa_N^2}e^{\eta/2}r^3ZA_t'. \tag{5.8}$$

由运动方程可知求解需要 6 个边界条件, 视界半径 r_h 的定义要求 $f(r_h) = 0$ 。为了便于计算, 我们令 $\eta(r \rightarrow \infty) = 0$ 。此外, 为了使 $A_t dt$ 有良好定义, 我们令 $A_t(r_h) = 0$ 。最后我们给定 $A_t(r_h)$ 和 $\phi(r_h)$ 的边界条件,

$$\left.\frac{A_t(r)}{r}\right|_{r=r_h} = a_h, \quad \left.\frac{\phi(r)}{r}\right|_{r=r_h} = \phi_h. \tag{5.9}$$

其中 a_h, ϕ_h 为待输入的参数。

5.2.1 IR 展开 (事件视界处)

在视界处 ($r = r_h$), 边界展开为

$$\begin{aligned}
 f &= f_h^0 (r - r_h) + \dots \\
 \eta, &= \eta_h^0 + \eta_h^1 (r - r_h) + \dots, \\
 A_t &= a_h^0 (r - r_h) + \dots, \\
 \phi &= \phi_h^0 + \phi_h^1 (r - r_h) + \dots
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

正如前文所提到的, 在计算中我们首先令 $\eta_h^0 = 0, r_h = 1$ 以简化计算, 然后利用对称性 (5.3) 将参数定回原物理参数。此外, 由于高阶计算的复杂性, 我们取 IR 展开取到第三阶。

5.2.2 UV 展开 (AdS 边界处)

之前我们取 AdS 半径 $L = 1$ 。根据全息字典, 标量场 ϕ 的共形维度为

$$\Delta \equiv \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2 R^2}. \tag{5.11}$$

由标量算符的共形维数为 $\Delta_+ = 3$ 可以得到 $m^2 = -3, \Delta_- = 1$ 。类似的, 我们可以得到规范场 A_t 的共形维数为 $\Delta_- = 0$ 和 $\Delta_+ = 2$ 。因此当 $r \rightarrow \infty$ 时, 各场位

形的 UV 展开为

$$\begin{aligned}
 \phi(r) &= \frac{1}{r} \left[\phi_s + \frac{\phi_v}{r^2} - \frac{\ln(r)}{6r^2} (1 - 6c_1^4) \phi_s^3 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln(r)}{r^4}\right) \right] \\
 A_t(r) &= \mu_B - \frac{2\kappa_N^2 \rho_B}{2r^2} - \frac{2\kappa_N^2 \rho_B c_3 c_5 \phi_s}{3(1+c_3)r^3} + \frac{2\kappa_N^2 \rho_B \phi_s^2 ((1+c_3)^2 - 6(-1+c_3)c_3 c_5^2)}{48(1+c_3)^2 r^4} \\
 &\quad + \frac{2\kappa_N^2 \rho_B c_3 c_5 (-10c_5^2 (1+(-4+c_3)c_3)) \phi_s^3}{300(1+c_3)^3 r^5} + \frac{2\kappa_N^2 \rho_B c_3 c_5 ((7-12c_1^4) \phi_s^3 - 60\phi_v)}{300(1+c_3)r^5} \\
 &\quad - \frac{2\kappa_N^2 \rho_B c_3 c_5 \phi_s^3 (-1+6c_1^4) \ln(r)}{30(1+c_3)r^5} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln(r)}{r^6}\right), \\
 \eta(r) &= \eta_h + \frac{\phi_s^2}{6r^2} + \frac{(1-6c_1^4)\phi_s^4 + 72\phi_s\phi_v}{144r^4} - \frac{\ln(r)}{12r^4} (1-6c_1^4) \phi_s^4 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln(r)^2}{r^6}\right), \\
 f(r) &= r^2 \left[1 + \frac{\phi_s^2}{6r^2} + \frac{f_v}{r^4} - \frac{\ln(r)}{12r^4} (1-6c_1^4) \phi_s^4 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln(r)^2}{r^6}\right) \right].
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

其中根据全息对偶字典, μ_B 是重子化学势, ρ_B 为对应的重子数密度, ϕ_s 为源, 在模型中可以看作能标。利用对称性 $\lambda_t = e^{\eta_h/2}$ 可以使 $\eta(r \rightarrow \infty) = \eta_h = 0$ 。

5.3 全息重整化

将上一节中的 UV 展开代入作用量 (公式 5.1) 后, 可以得到作用量在边界处的发散项为

$$S_{div} = \frac{1}{2\kappa_N^2} \int_{r \rightarrow \infty} dx^4 \sqrt{-h} \left[-2r^4 - \frac{r^2 \phi_s^2}{6} + \frac{1}{12} (1-6c_1^4) \phi_s^4 \ln[r] \right]. \tag{5.13}$$

为了消除以上发散项, 我们用 $\sqrt{-h}K, \sqrt{-h}\Lambda, \sqrt{-h}\phi^2, \sqrt{-h}\phi^4$ 构造抵消项。

$$\begin{aligned}
 S_{\partial} &= S_{\text{Gibbons-Hawking}} + S_{\text{counter}} \\
 &= \frac{1}{2\kappa_N^2} \int_{r \rightarrow \infty} dx^4 \sqrt{-h} \left[2K - 6 - \frac{1}{2} \phi^2 - \frac{6c_1^4 - 1}{12} \phi^4 \ln[r] - b\phi^4 + \frac{1}{4} F_{\rho\lambda} F^{\rho\lambda} \ln[r] \right].
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

其中 $h_{\mu\nu}$ 为边界上的诱导度规, K 为外曲率, b 为引入的自由参数, 通过与格点 QCD 给出的物理量 I, P, ϵ 拟合后, 我们得到 $b = -0.2554$ 。重整化后的作用

量 $S^{(R)} = S + S_\partial$ 在 $r \rightarrow \infty$ 边界上将不再发散。由重整化的作用量可以得到 Brown-York 能动张量

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{-\det g}} \frac{\delta(S + S_\partial)_{on-shell}}{\delta g^{\mu\nu}} \\ &= \frac{1}{2\kappa_N^2} \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \left[2(Kh_{\mu\nu} - K_{\mu\nu} - 3h_{\mu\nu}) - \left(\frac{1}{2}\phi^2 + \frac{6c_1^4 - 1}{12}\phi^4 \ln[r] + b\phi^4 \right) h_{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. - \left(F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^\rho - \frac{1}{4}h_{\mu\nu}F_{\rho\lambda}F^{\rho\lambda} \right) \ln[r] \right] \end{aligned} \quad (5.15)$$

5.4 热力学与稳定性

在这小节中，我们将推导并定义相关热力学量。内能 $U = U(S, V, N)$ 由以下系统物理量决定：广延量熵 S 、体积 V 、粒子数 N 及其对应的强度量温度 T 、压强 p 、化学势 μ 。我们取广延量的对应密度能量密度、熵密度、粒子数密度为

$$\epsilon \equiv U/V, \quad s \equiv S/V, \quad \rho \equiv N/V. \quad (5.16)$$

其热力学关系为

$$\begin{aligned} U &= TS - pV + \mu N, \\ d\epsilon &= Tds + \mu d\rho. \end{aligned} \quad (5.17)$$

定义自由能 $\Omega(T, \mu)$ ，利用勒让德变换后得到

$$\begin{aligned} \Omega(T, \mu) &\equiv \epsilon - sT - \mu\rho, \\ d\Omega &= -sdT - \rho d\mu. \end{aligned} \quad (5.18)$$

由此定义可以得到

$$\begin{aligned} p &= sT + \mu\rho - \epsilon \\ &= -\Omega. \end{aligned} \quad (5.19)$$

我们用温度 T 和化学势 μ 来描述相结构，相图中每一个点 (T, μ) 都对应一对 (s, ρ) ，且为了整体稳定性， (s, ρ) 的取值让该点自由能最小。同时局域稳定性要求以下敏感性矩阵为正定的

$$\mathcal{S} \equiv \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 \Omega}{\partial T^2} & -\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mu \partial T} \\ -\frac{\partial^2 \Omega}{\partial T \partial \mu} & -\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mu^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial T} & \frac{\partial s}{\partial \mu} \\ \frac{\partial \rho}{\partial T} & \frac{\partial \rho}{\partial \mu} \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

其中，敏感性矩阵中的 $\frac{\partial s}{\partial T}$ 跟比热的联系为

$$\begin{aligned} C_\mu &\equiv T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_\mu = -T \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial T^2} \right)_\mu, \\ C_\rho &\equiv T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_\rho = -T \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial T^2} - \frac{(\partial^2 \Omega / \partial T \partial \mu)^2}{(\partial^2 \Omega / \partial \mu^2)} \right]. \end{aligned} \quad (5.21)$$

右下的脚标 μ 指比热定义在化学势恒定的条件下， ρ 指在体积恒定的条件下。

敏感性矩阵中的 $\frac{\partial \rho}{\partial \mu}$ 跟压缩率、夸克磁化率的联系为

$$\begin{aligned} \kappa_T &\equiv \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \mu} \right)_T \\ \chi_2 &\equiv \left(\frac{\partial \rho}{\partial \mu} \right)_T = - \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mu^2} \right)_T = \rho^2 \kappa_T. \end{aligned} \quad (5.22)$$

利用上述定义，敏感性矩阵 \mathcal{S} 的行列式为

$$\det \mathcal{S} = \frac{1}{T} \chi_2 C_\rho. \quad (5.23)$$

局域稳定性要求敏感性矩阵正定，即其行列式为正。

5.4.1 状态方程

利用之前给出的渐进展开 (公式 5.10)，我们给出边界场论的热力学量。首先是温度与重子化学势，正如之前所说，QCD 相图由这两个物理量描述。温度 T 由背景时空中黑洞的 Hawking 温度给出，化学势 μ_B 由规范场 A_t 给出，为

A_t 的领头阶展开系数。

$$T = \frac{\sqrt{-g'_{tt}g^{rr'}}}{4\pi} \Big|_{r=r_h} = \frac{1}{4\pi} f'(r_h) e^{-\eta(r_h)/2}. \quad (5.24)$$

熵密度由背景时空中黑洞的视界面积给出^[62,63]

$$s = \frac{2\pi}{\kappa_N^2} r_h^3. \quad (5.25)$$

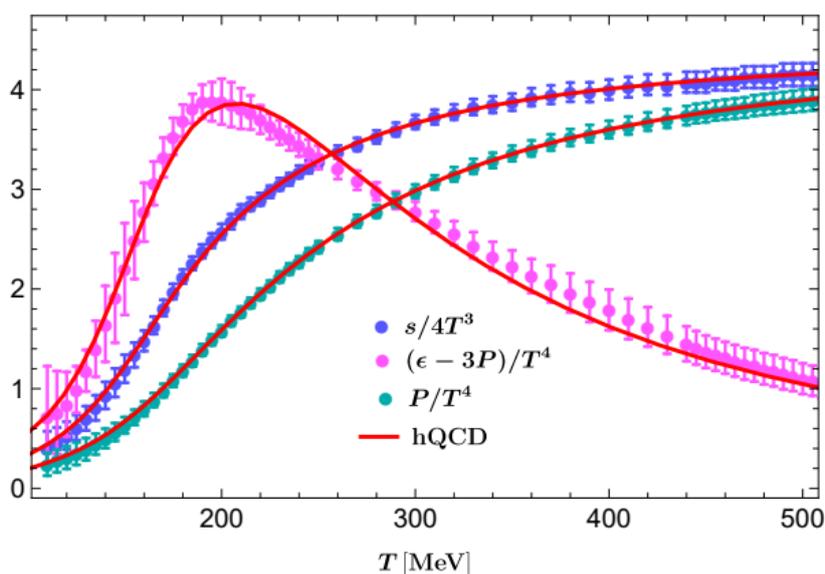


图 5.1 零重子化学势下的能量密度、迹反常和压强与格点 QCD^[6] 对比结果

其他物理量如能量密度 ϵ 、压强 P 和迹反常 I 可以由能动张量 (5.15) 的分量给出

$$\begin{aligned} \epsilon &= T_{tt} = \frac{1}{2\kappa_N^2} \left(-3f_v + \phi_s \phi_v + \frac{1+48b}{48} \phi_s^4 \right), \\ P &= T_{xx} = T_{yy} = T_{zz}, \\ &= \frac{1}{2\kappa_N^2} \left(-f_v + \phi_s \phi_v + \frac{3-48b-8c_1^4}{48} \phi_s^4 \right), \\ I &= \epsilon - 3P. \end{aligned} \quad (5.26)$$

以上物理量与格点 QCD 比对的结果如图 5.1 所示^[6]，实线为全息 QCD 模

型给出的结果，带误差棒的点为格点 QCD 结果。

另外，声速和重子磁化率的定义为

$$c_s^2 = \frac{dP}{d\epsilon} \Big|_{\mu_B} = \left(\frac{T}{s} \frac{\partial s(T, \mu_B)}{\partial T} \Big|_{\mu_B} + \frac{\mu_B}{s} \frac{\partial \rho_B(T, \mu_B)}{\partial T} \Big|_{\mu_B} \right)^{-1}, \quad (5.27)$$

$$\chi_B = \frac{1}{T^2} \frac{d\rho_B}{d\mu_B} \Big|_T \sim \frac{1}{T^2} \frac{\rho_B}{\mu_B}.$$

需要注意的是，上式重子磁化率 χ_B 的近似只在重子化学势 μ_B 很小时成立，当进入有限重子化学势区域时需要严格按照导数定义计算。

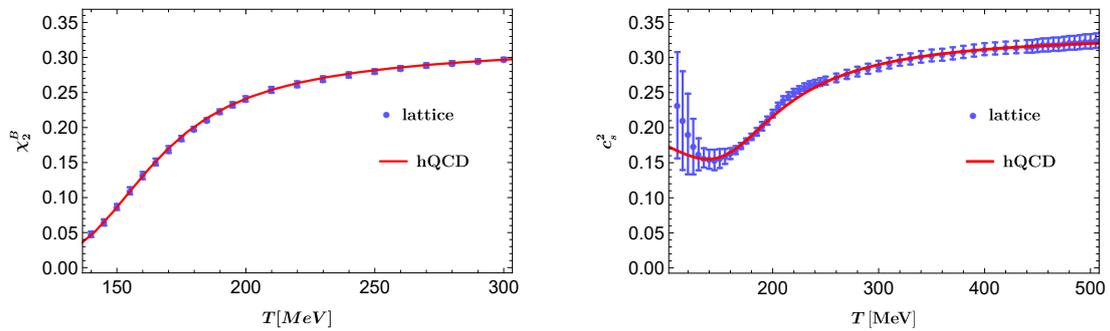


图 5.2 零重子化学势下的极化率与声速与格点 QCD^[6,7] 的对比结果

图 5.2 为零重子化学势下的结果，根据与格点 QCD 数据对比之后我们得到了模型需要的参数^[6,7]。进一步地，我们通过该模型预测得到有限重子化学势下的结果，其与格点 QCD 数据的结果对比如图 5.3 所示，实线为模型结果，带误差棒的点为格点 QCD 结果^[8]。

从上图可以看出，在有限重子化学势下，除了荷密度 ρ_B 在 $\mu_B/T = 3, 3.5$ 的高温区域以外，模型给出的预言与格点 QCD 数据拟合得很好。

为了得到准确的 QCD 相图中的临界点，我们接下来计算系统的自由能。

$$\begin{aligned} \Omega &= -\frac{T}{V} (S + S_\partial)_{\text{on-shell}} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[2e^{-\eta/2} r^2 f - e^{-\eta/2} r^3 \sqrt{f} \left(2K - 6 - \frac{1}{2} \phi^2 - \frac{6c_1^4 - 1}{12} \phi^4 \ln(r) - b\phi^4 \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\kappa_N^2} \left(f_v - \phi_s \phi_v - \frac{3 - 48b - 8c_1^4}{48} \phi_s^4 \right). \end{aligned} \quad (5.28)$$

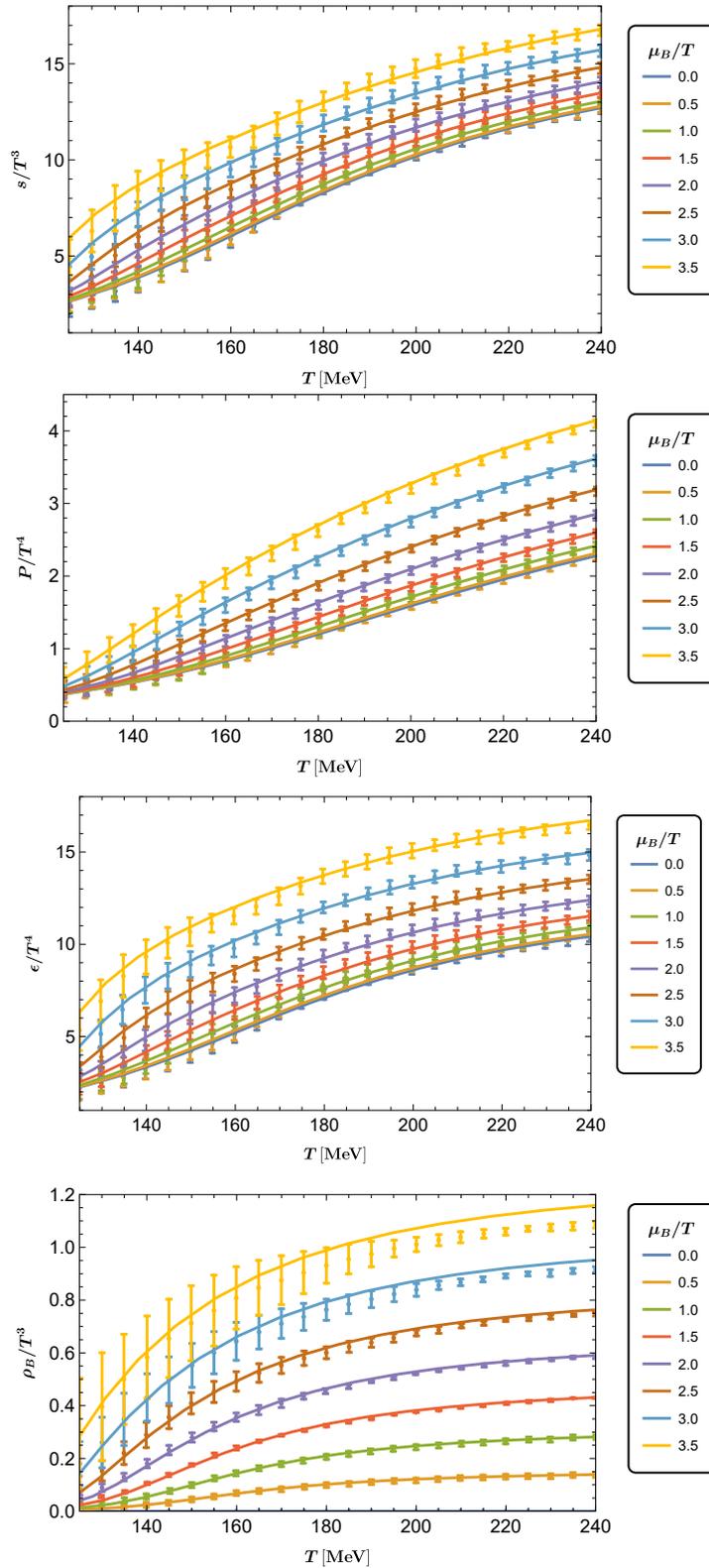


图 5.3 有限重子化学势下的熵密度 s , 压强 P , 能量密度 ϵ , 重子数密度 ρ_B 与格点 QCD^[8] 的对比结果

其中, T 为黑洞背景给出的温度, 体积 $V = \int dx dy dz$ 且 $t \in [0, 1/T]$, $(S + S_\partial)_{\text{on-shell}}$ 为重整后的在壳作用量, 前面的符号由欧式与闵式作用量的差异给出。这个结果满足热力学关系 $P = -\Omega$ 。计算结果如图 5.4 所示。

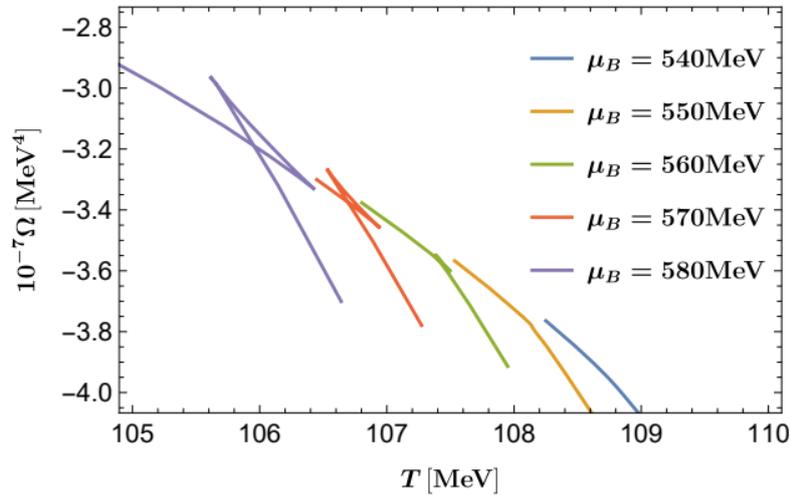


图 5.4 有限化学势下自由能随温度的变化

作为对数值结论的热力学检验, 我们可以通过守恒量 Q 的构建来实现。其中, 守恒量 Q 的构建如下

$$Q = \frac{1}{2\kappa_N^2} r^3 e^{\eta/2} \left[r^2 \left(\frac{f}{r^2} e^{-\eta} \right)' - Z A_t A_t' \right], \quad (5.29)$$

守恒量 Q 连接了视界与边界,

$$\begin{aligned} Q &= Ts \quad \text{at horizon,} \\ Q &= \epsilon + P - \mu_B \rho_B \quad \text{at boundary.} \end{aligned} \quad (5.30)$$

根据上面的关系, 我们再次验证了热力学关系为

$$\Omega = \epsilon - Ts - \mu_B \rho_B = -P. \quad (5.31)$$

5.5 QCD 相结构

通过以上计算，我们最终得到 QCD 相图结构如图 5.5 所示

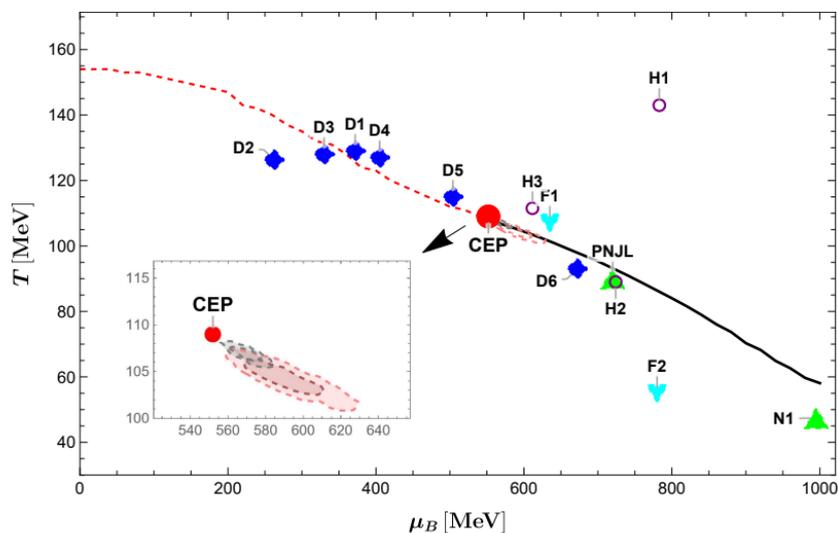


图 5.5 hQCD 预言温服密度相图

其中红色点线为 χ_B 的极大值点得到的 crossover，黑色实线为自由能不连续点给出的一阶相变线，两线交汇的点为临界点，即红色的点。模型给出的临界点为 $T_c = 108\text{MeV}$, $\mu_c = 552\text{MeV}$ 。其他 EMD 模型通过拟合 hotQCD 的 LQCD 数据得到临界点为 $T_c = 105\text{MeV}$, $\mu_c = 555\text{MeV}$ ^[64]。深蓝色的点为来自 DSE(Schwinger-Dyson equation) 方程^[65-70]，绿色的点来自 NJL(Nambu-Jona-Lasinio) 模型^[71,72]，浅蓝色的点来自 FRG(Functional renormalization group)^[73,74]。与其他模型得到的临界点结果相比，Dyson-Schwinger 方法得到的点 D4 及泛函重整化群得到的 F1 与我们的模型最相近。左下的小图中，红色区域为 PHA 模型的贝叶斯预测结果，灰色区域来自 PA 模型，由 Bayesian 分析给出，内线和外线区域分别代表在 PA 假设下的 CEP 出现的 68% 和 95% 的置信区间。对比其他模型得到的临界点，我们的模型是最靠近这个区域的。另外，当重子化学势 μ_B 继续增加到 1050MeV 左右时，黑洞解不易求解，这可能与存在色超导等其他现象有关。

第 6 章 临界指数与夸克凝聚

在这一章节中，我们将在临界点结果的基础上继续分析其附近的临界行为。此外在已有模型基础上，我们将引入探子作用量来求解夸克凝聚等物理量，从而得到模型的味动力学相关信息。

6.1 临界指数

临界指数是用来描述体系临界行为的关键参数之一，利用上一章中得到的临界点和临界点附近物理量的变化趋势我们可以计算得到临界指数。系统趋近临界点时，往往有相似的临界指数行为。我们考虑用 4 个临界指数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 来描述这种行为。临界指数满足以下标度关系

$$\begin{aligned}\alpha + 2\beta + \gamma &= 2, \\ \alpha + \beta(1 + \delta) &= 2.\end{aligned}\tag{6.1}$$

6.1.1 沿一阶相变线上的结果 β

沿一阶相变线 (μ_f, T_f) 趋近时，此时温度低于临界温度，熵密度 s 为多值函数， $\mu = \mu_f$ 等化学势线定出 s_{up} 和 s_{down} ，此时出现不连续性 $\Delta s = s_{\text{up}} - s_{\text{down}}$ 。可以通过两种方法求得 Δs ，第一种方法是通过计算自由能， s_{up} 和 s_{down} 对应的自由能将相等。第二种方法是通过 Maxwell 等面积法则，由 $\mu = \mu_f$ 线和等温线围住的两部分面积应该相等。当越来越靠近临界点时， Δs 将趋于 0。

我们定义临界指数 β 为

$$\Delta s \sim (T_c - T)^\beta\tag{6.2}$$

以上定义将沿一阶相变线趋近临界点。

我们画出纵坐标为 $\ln(\Delta s)$ ，横坐标为 $\ln(T - T_c)$ 的图， β 即为线性回归

得到的直线斜率，模型计算得到 $\beta = 0.46934$ ，非常接近平均场给出的结果 $\beta_{MF} = 1/2$ 。结果如图 6.1 所示。

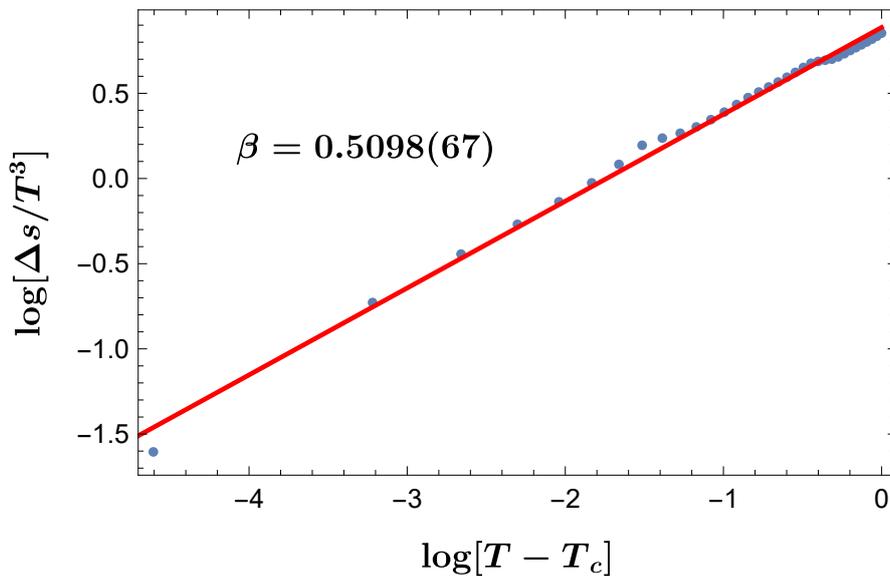


图 6.1 由一阶相变线上熵密度不连续得到的临界指数 β

6.1.2 沿临界等温线的结果 δ

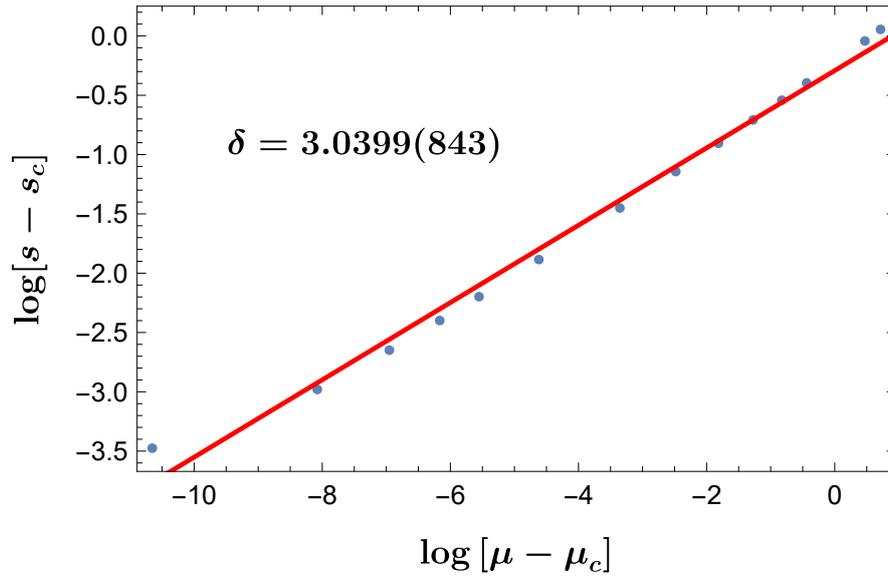
由上面对临界情况的分析，在温度高于 T_c 区间，熵密度 s 为重子化学势 μ 的单值函数，在趋近临界点时，等温线下的熵密度 s 在 $\mu = \mu_c$ 点处有发散的斜率。在温度低于 T_c 区间，临界点附近的 s_{up} 和 s_{down} 将逐渐靠近，给出 s_c 。临界指数 δ 的定义如下

$$s - s_c \sim |\mu_B - \mu_c|^{1/\delta}, \tag{6.3}$$

模型给出 $\delta = 3.27095$ ，结果如图 6.2 所示。

6.1.3 沿一阶相变线反向延长线的结果 α 、 γ

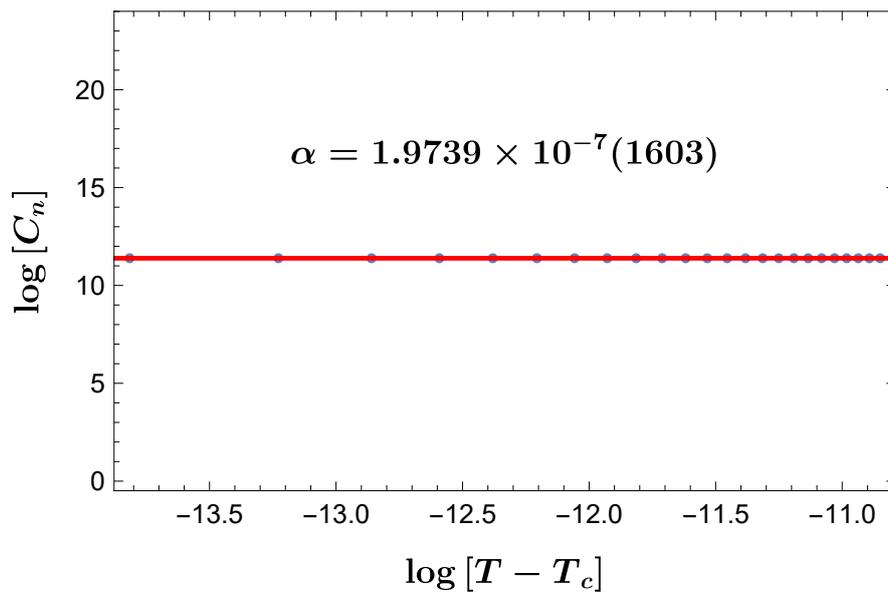
由一阶相变线在临界点处的切线可以得到延长线，在实际计算中，我们用等粒子数密度线 $\rho = \rho_c$ 近似代替^[75]，粒子数密度 ρ 有着与熵密度 s 相似的多值行为，在从低于临界温度 T_c 区间靠近临界点时， ρ_{up} 和 ρ_{down} 最终收敛到同一点 ρ_c 。

图 6.2 由等温线上的熵密度临界行为得到的临界指数 δ

临界指数 α 由以下定义得到

$$C_\rho \equiv T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_\rho = -T \left[\frac{\partial^2 f}{\partial T^2} - \frac{(\partial^2 f / \partial T \partial \mu)^2}{(\partial^2 f / \partial \mu^2)} \right] \sim |T - T_c|^{-\alpha}. \quad (6.4)$$

模型给出 $\alpha = 1.9739 \times 10^{-7}(1603)$ ，这代表 C_ρ 在临界点处没有发散行为。结果如图 6.3 所示。

图 6.3 由一阶相变线切线延长线上的临界行为得到的临界指数 α

最后，同延长线的临界指数 γ 由重子磁化率 χ_2 给出，定义如下

$$\chi_2 \sim |T - T_c|^{-\gamma} \tag{6.5}$$

沿着一阶相变线切线延长线，模型计算得到 $\gamma = 1.0159(62)$ ，如图 6.4所示

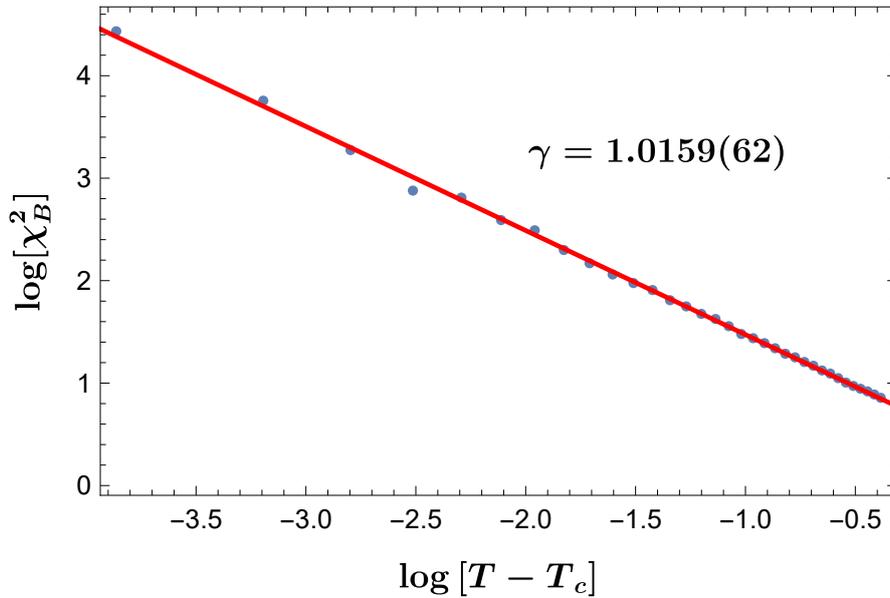


图 6.4 由一阶相变线切线延长线上的临界行为得到的临界指数 γ

6.1.4 总结

模型最终得到的结果满足临界指数必须满足的标度率，表 6.1给出了我们的结果 (ours) 与实验、3D 伊辛模型、平均场模型与 DGR 模型的结果的对比。可以看出我们的模型的临界指数满足 scaling 关系 (公式 6.1)，且与平均场的结果最接近。

表 6.1 临界指数

	Experiment	3D Ising	Mean field	DGR model	Ours
α	0.110 – 0.116	0.110(5)	0	0	$1.9739 \times 10^{-7}(1603)$
β	0.316 – 0.327	0.325 ± 0.0015	1/2	0.482	0.5098(67)
γ	1.23 – 1.25	1.2405 ± 0.0015	1	0.942	1.0159(62)
δ	4.6 – 4.9	4.82(4)	3	3.035	3.0399(843)

6.2 夸克凝聚

6.2.1 与 BMW 组的格点结果对比

接下来我们考虑味道的动力学和胶子凝聚。类似 KKSS 模型^[5]，在原有模型的基础上，我们引入探子作用量来计算得到手征凝聚和胶子凝聚。考虑 (2+1) 味的探子作用量

$$S_{X_q} = \frac{1}{2\kappa_N^2} \int d^5x \sqrt{-g} Z_q(\phi) \left[-\frac{1}{2} \nabla_\mu X_q \nabla^\mu X_q - V(X_q) \right], \quad (6.6)$$

$$Z_q(\phi) = a_1 e^{a_q \phi^2}, \quad V(X_q) = -\frac{3}{2} X_q^2 + a_0 X_q^4.$$

其中 $q = l(u, d)$ 代表轻夸克, $q = s$ 代表 s 夸克, 且夸克质量满足 $m_u = m_d < m_s$ 。根据全息字典, 场 X_q 对偶于边界手征算子 $\bar{\psi}_q \psi_q$, 其共形维度 $\Delta_c = 3$ 。与格点 QCD 数据拟合后可以得到耦合函数和势能函数的参数值为 $a_0 = 13, a_1 = 2.76, a_l = 0.58, a_s = 0.8$ 。

对场 X_q 变分得到运动方程

$$X_q'' + \left(\frac{f'}{f} - \frac{\eta'}{2} + \frac{3}{r} \right) X_q' + \frac{\partial_\phi Z_q X_q' \phi'}{Z_q} - \frac{1}{f} \partial_{X_q} V = 0. \quad (6.7)$$

由全息字典, 场 X_q 在 UV 边界上的展开为

$$X_q(r) = \frac{m_q}{r} + \dots + \frac{\sigma_q}{r^3} + \dots \quad (6.8)$$

我们取 $m_l = 5.1\text{MeV}, m_s = 102\text{MeV}$, 轻夸克和 s 夸克的质量比值满足 $m_s/m_l = 20$ 。

为了让作用量不在边界有发散行为, 类似之前的全息重整化过程, 代入边界展开到作用量中并对径向坐标积分后可得发散项为

$$S_{X_q, \text{div}} = \frac{1}{2\kappa_N^2} \int_{r \rightarrow \infty} \sqrt{-h} \left[-\frac{a_1}{3\kappa_N^2} m_q^2 \left(-\frac{3r^2}{2} + (9a_0 m_q^2 + \phi_s^2 - 6a_q \phi_s^2) \log[r] \right) \right]. \quad (6.9)$$

我们利用 $\sqrt{-h}X_q^2, \sqrt{-h}X_q^4, \sqrt{-h}X_q^2\phi^2$ 来构造边界抵消项

$$S_{X_q, \partial} = \frac{1}{2\kappa_N^2} \int_{r \rightarrow \infty} dx^4 \sqrt{-h} \left[-\frac{1}{2} a_1 X_q^2 + a_1 a_0 X_q^4 \ln r + \frac{a_1 (1 - 6a_q)}{6} X_q^2 \phi^2 \ln r \right]. \quad (6.10)$$

根据全息字典，手征凝聚可以由重整后的在壳作用量计算得到

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle_{q, T} = \frac{\delta S_{X_q}^{ren}}{\delta m_q} = \frac{a_1}{2\kappa_N^2} \left[2\sigma_q + 2a_0 m_q^3 + \frac{1}{4} m_q \phi_s^2 \right]. \quad (6.11)$$

其中， $S_{X_q}^{ren} \equiv S_{X_q} + S_{X_q, \partial}$. 根据上面的结果以及 BMW 组的正规化方案，我们可以计算得到重整后的手征凝聚为

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle_R = - \left[\langle \bar{\psi} \psi \rangle_{l, T} - \langle \bar{\psi} \psi \rangle_{l, 0} \right] \frac{m_l}{X^4} \quad l = u, d. \quad (6.12)$$

其中， X 为有着质量量纲的任意常数，由于夸克质量不为 0，我们可以取 $X = m_\pi = 135 \text{ MeV}$. 这里的 $\langle \bar{\psi} \psi \rangle_{l, 0}$ 可以通过两种途径得到，一种方案是当作自由参数，另一种方案是取低温时的 $\langle \bar{\psi} \psi \rangle_{l, T}$ 的值。经计算后我们发现两种途径都给出了相同的结果，为了计算简便，我们采取后者。计算结果如图 6.5 所示。

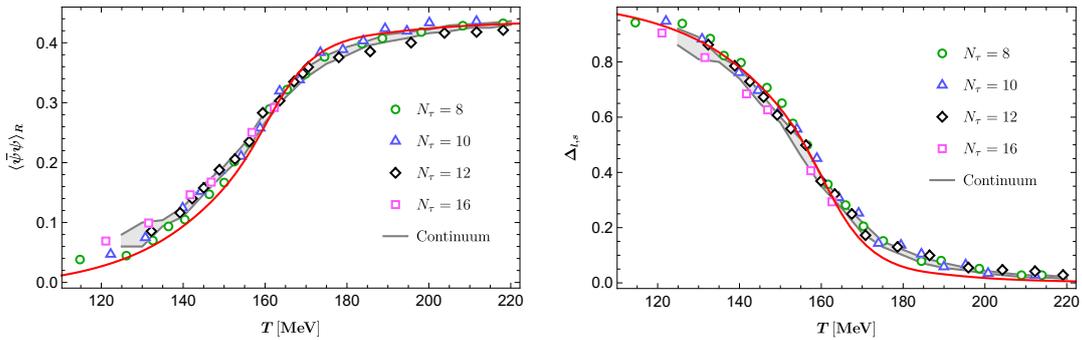


图 6.5 重整化后的手征凝聚 $\langle \bar{\psi} \psi \rangle_R$ 与 $\Delta_{l,s}$

另外还可以得到手征凝聚 $\Delta_{l,s}$,

$$\Delta_{l,s} = \frac{\langle \bar{\psi} \psi \rangle_{l, T} - \frac{m_l}{m_s} \langle \bar{\psi} \psi \rangle_{s, T}}{\langle \bar{\psi} \psi \rangle_{l, 0} - \frac{m_l}{m_s} \langle \bar{\psi} \psi \rangle_{s, 0}} \quad l = u, d. \quad (6.13)$$

计算结果如图 6.5 所示，图中的点来自格点，灰色区域为取连续极限的格点数据^[76]。进一步利用模型计算得到有限重子化学势下的手征凝聚，结果如图 6.6 所示。

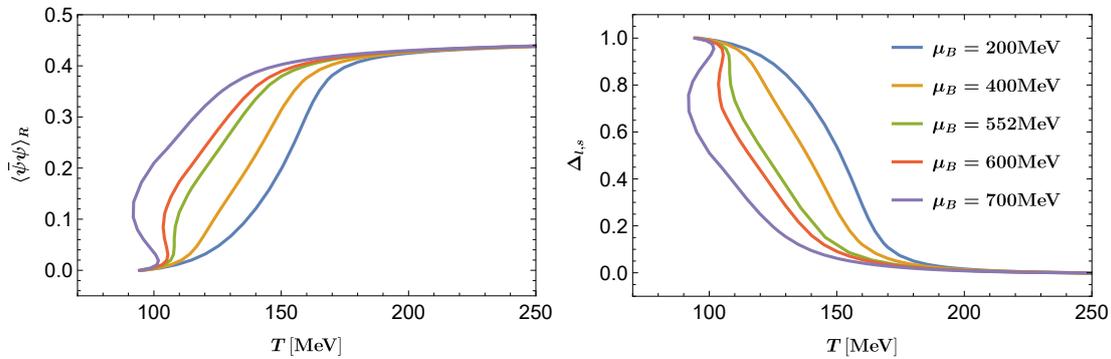


图 6.6 有限重子化学势下重整化后的手征凝聚 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_R$ 和 $\Delta_{l,s}$

6.2.2 与 hotQCD 组的格点结果对比

为了进一步验证我们模型的有效性，我们也考虑了 hotQCD 组给出的 BMW 组尚未计算的夸克凝聚、胶子凝聚的结果。探子作用量、耦合函数、势能函数与上一节中的公式 6.6 相同，参数取

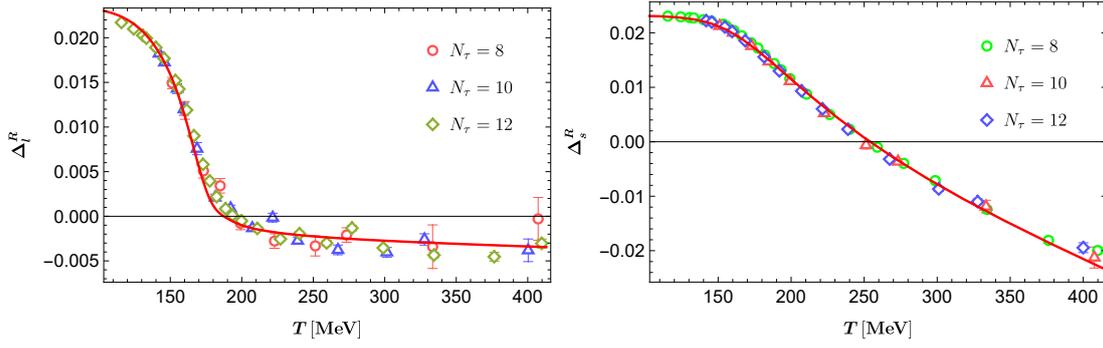
$$a_0 = 30, a_1 = 2.93, a_l = 0.62, a_s = 1.227. \quad (6.14)$$

另外，我们取 $m_l = 4.6\text{MeV}$, $m_s = 92\text{MeV}$ ，轻夸克和 s 夸克的质量比值仍然满足 $m_s/m_l = 20$ 。

HotQCD 组定义的重整后的手征凝聚为^[77]

$$\begin{aligned} \Delta_q^R &= \hat{d} + 2m_s r_1^4 [\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{q,T} - \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{q,0}], \\ \hat{d} &= 0.0232244, \quad r_1 = 0.3106\text{fm}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

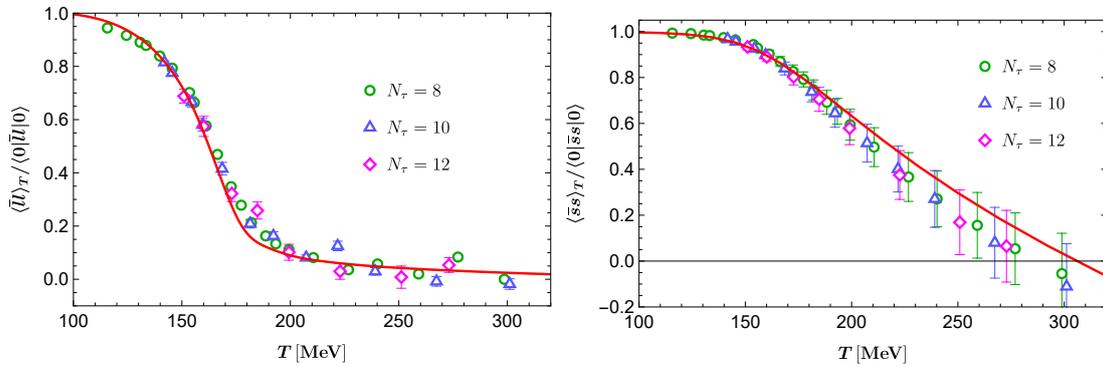
类似之前的做法，我们取足够低温下的 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{q,T}$ 值作为 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{q,0}$ ，即 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{l,0} = 1.81 \times 10^7$, $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{s,0} = -1.033 \times 10^8$ 。结果如图 6.7 所示，图中带误差棒的点来自格点^[78]。


 图 6.7 轻夸克 ($l=u, d$) 和 s 夸克的重整化后的手征凝聚 Δ_q^R

另外, 夸克凝聚的定义如下^[79]

$$\frac{\langle \bar{l}l \rangle_T}{\langle 0|\bar{l}l|0 \rangle} = 1 - \frac{\hat{d} - \Delta_l^R(T)}{\hat{d} - \Delta_l^R(\infty)}, \quad \frac{\langle \bar{s}s \rangle_T}{\langle 0|\bar{s}s|0 \rangle} = 1 + \frac{\hat{d} - \Delta_s^R(T)}{2m_s r_1^4 \langle 0|\bar{s}s|0 \rangle}. \quad (6.16)$$

其中, 我们取跟 hotQCD 格点结果相同的参数, 即 $\langle \bar{l}l \rangle_0 \equiv \langle 0|\bar{l}l|0 \rangle = -[272(5)\text{MeV}]^3$, $\langle 0|\bar{s}s|0 \rangle = -[296(11)\text{MeV}]^3$, $\Delta_l^R(\infty) \approx \Delta_l^R(300\text{MeV}) = -0.002$. 结果与格点的对比如图 6.8 所示^[78].


 图 6.8 轻夸克凝聚 $\langle \bar{l}l \rangle_T / \langle 0|\bar{l}l|0 \rangle$ 和 s 夸克凝聚 $\langle \bar{s}s \rangle_T / \langle 0|\bar{s}s|0 \rangle$

利用之前计算得到的结果, 我们可以进一步得到胶子凝聚^[80,81]

$$\delta \left\langle \frac{\beta(g)}{2g} G^2 \right\rangle_T = \theta(T) - \hat{m}_u \delta \langle \bar{u}u \rangle_T - \hat{m}_d \delta \langle \bar{d}d \rangle_T - \hat{m}_s \delta \langle \bar{s}s \rangle_T. \quad (6.17)$$

这里的 $\delta f(T) = f(T) - f(0)$, $\theta(T)$ 为上一章中计算得到的迹反常依赖于温度的

函数，我们取 β 函数到第四阶^[82]。

$$\frac{\beta(g)}{2g} = - (2\pi\beta_0\alpha_s + 8\pi^2\beta_1\alpha_s^2 + 32\pi^3\beta_2\alpha_s^3 + 128\pi^4\beta_3\alpha_s^4). \quad (6.18)$$

其中，

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left(11 - \frac{2}{3}N_f \right), \quad \beta_1 = \frac{1}{(4\pi)^4} \left(102 - \frac{38}{3}N_f \right), \\ \beta_2 &= \frac{1}{(4\pi)^6} \left(\frac{2857}{2} - \frac{5033}{18}N_f + \frac{325}{54}N_f^2 \right), \\ \beta_3 &= \frac{1}{(4\pi)^8} \left[\frac{149753}{6} + 3564\zeta_3 - \left(\frac{1078361}{162} + \frac{6508}{27} \right) N_f \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{50065}{162} + \frac{6472}{81}\zeta_3 \right) N_f^2 + \frac{1093}{729}N_f^3 \right] \end{aligned} \quad (6.19)$$

对于 (2+1) 味的系统，取 $N_f = 3$ 。耦合常数 α_s 随能标跑动的行为为^[83]

$$\begin{aligned} \alpha_s(\mu) &= \frac{1}{4\pi\beta_0 L_\mu} \left[1 - \frac{\beta_1}{\beta_0^2 L_\mu} \ln(L_\mu) + \frac{\beta_1^2}{\beta_0^4 L^2} \left(\ln^2(L_\mu) - \ln(L_\mu) - 1 + \frac{\beta_0\beta_2}{\beta_1^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. \frac{\beta_1^3}{\beta_0^6 L_\mu^3} \left(\ln^3(L_\mu) - \frac{5}{2} \ln^2(L_\mu) - \left(2 - \frac{3\beta_0\beta_2}{\beta_1^2} \right) \ln(L_\mu) + \frac{1}{2} - \frac{\beta_0^2\beta_3}{2\beta_1^3} \right) \right], \\ L_\mu &= \ln(\mu^2/\Lambda_{QCD}^2). \end{aligned} \quad (6.20)$$

其中，我们把 μ/Λ_{QCD} 看作温度，这样就可以将耦合常数对能标 μ 的依赖转换为对温度的依赖。跑动的夸克质量为^[84]

$$\begin{aligned} \hat{m}_q(\mu) &= \bar{m}_q \left(\frac{\alpha_s(\mu)}{\pi} \right)^{\gamma_0/(4\pi^2\beta_0)} \left[1 + A_1 \left(\frac{\alpha_s(\mu)}{\pi} \right) + \frac{(A_1^2 + A_2)}{2} \left(\frac{\alpha_s(\mu)}{\pi} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}A_1^3 + \frac{3}{2}A_1A_2 + A_3 \right) \left(\frac{\alpha_s(\mu)}{\pi} \right)^3 \right]. \end{aligned} \quad (6.21)$$

其中

$$\begin{aligned}
 A_1 &= -\frac{\beta_1\gamma_0}{\beta_0^2} + \frac{\gamma_1}{(2\pi)^2\beta_0}, \\
 A_2 &= (2\pi)^2 \frac{\gamma_0}{\beta_0^2} \left(\frac{\beta_1^2}{\beta_0} - \beta_2 \right) - \frac{\beta_1\gamma_1}{\beta_0^2} + \frac{\gamma_2}{(2\pi)^2\beta_0}, \\
 A_3 &= (2\pi)^4 \left[\frac{\beta_1\beta_2}{\beta_0} - \frac{\beta_1}{\beta_0} \left(\frac{\beta_1^2}{\beta_0} - \beta_2 \right) - \beta_3 \right] \frac{\gamma_0}{\beta_0^2} \\
 &\quad + (2\pi)^2 \frac{\gamma_1}{\beta_0^2} \left(\frac{\beta_1^2}{\beta_0} - \beta_2 \right) - \frac{\beta_1\gamma_2}{\beta_0^2} + \frac{\gamma_3}{(2\pi)^2\beta_0}, \\
 \gamma_0 &= 1, \quad \gamma_1 = \frac{1}{16} \left(\frac{202}{3} - \frac{20}{9}N_f \right), \\
 \gamma_2 &= \frac{1}{64} \left[1249 - \left(\frac{2216}{27} + \frac{160}{3}\zeta_3 \right) N_f - \frac{140}{81}N_f^2 \right], \\
 \gamma_3 &= \frac{1}{256} \left[\frac{4603055}{162} + \frac{135680}{27}\zeta_3 - 8800\zeta_5 \right. \\
 &\quad \left. + \left(-\frac{91723}{27} - \frac{34192}{9}\zeta_3 + 880\zeta_4 + \frac{18400}{9}\zeta_5 \right) N_f \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{5242}{243} + \frac{800}{9}\zeta_3 - \frac{160}{3}\zeta_4 \right) N_f^2 + \left(-\frac{332}{243} + \frac{64}{27}\zeta_3 \right) N_f^3 \right].
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

这里的 $\zeta_3, \zeta_4, \zeta_5$ 分别为 3 阶、4 阶、5 阶黎曼函数, \bar{m}_q 为可调的自由参数, 我们仍然选择保持 $\bar{m}_s/\bar{m}_l = 20$ 关系, 最终模型的参数设置为 $\bar{m}_l = 16\text{MeV}$, $\bar{m}_s = 320\text{MeV}$. 我们得到胶子凝聚如图 6.9 所示, 红色点线为我们的全息 QCD 模型计算结果, 红色区域、蓝色实线和绿色实线分别为格点给出的胶子凝聚、轻夸克对胶子凝聚的贡献和 s 夸克对胶子凝聚的贡献^[78]。

另外, 我们进一步利用探针模型计算有限重子化学势下手征凝聚, 结果如图 6.10 所示。从图中可以看出, 在温度为 100MeV 左右、重子化学势为 552MeV 以上时, 手征凝聚出现多值行为, 这标志着此时发生了一阶相变, 而随着重子化学势的降低, 多值行为消失, 相变转变为 crossover, 这里给出的临界点与上一章中我们求解背景时空的作用量得到的临界点相同。这里出现跟之前相同的相变的原因在于, 引入探针作用量时, 我们忽略了探针对背景时空的反作用, 如果能够重新考虑到这种反作用。有限重子化学势下的手征凝聚能够给出更多非平凡的行为和信息。

从目前的结果可以看出, 我们的模型与格点给出的结果都拟合得很好, 模

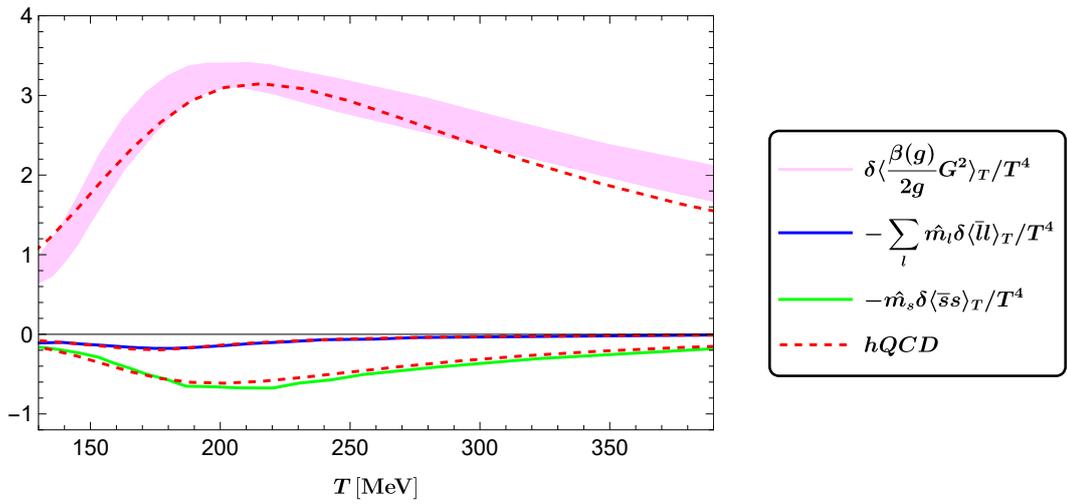


图 6.9 胶子凝聚结果及其中夸克凝聚的贡献

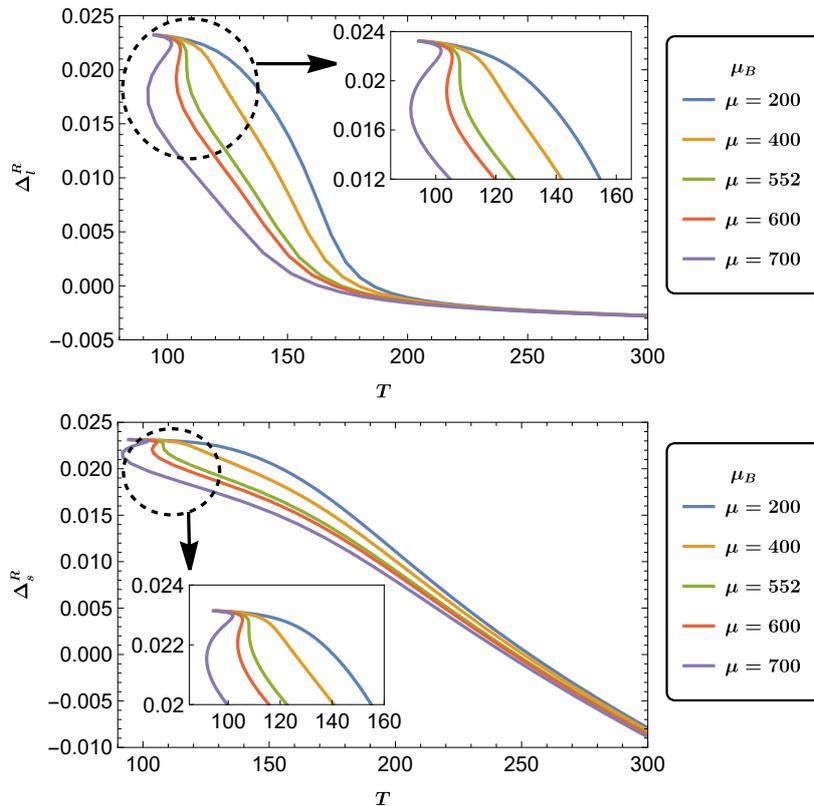


图 6.10 有限重子化学势下的轻夸克和 s 夸克凝聚的重整化后的手征凝聚

型可靠地描述了 QCD 中的味动力学，这些结果进一步地证明了我们模型的有效性与泛用性。

第 7 章 结论与展望

在本研究中，我们通过全息对偶原理自下而上地建立了一个全息 QCD 模型，研究了有限化学势下的热力学、相图结构中临界点的位置、临界指数以及夸克凝聚、胶子凝聚等描述 QCD 热力学、味动力学的物理量。在基于 EMD 模型给出作用量后，我们对作用量进行全息重整化，并利用场论的热力学关系及规范/场论对偶对重整化后的作用量微分得到各种物理量。进一步，我们通过将得到的物理量与 BMW 组的 LQCD 结果对比确定模型参数后，利用运动方程数值求解黑洞得到有限温度、有限密度下的热力学，并利用一阶相变时自由能的多值行为得到临界点的位置。

在已知临界点准确位置和有限化学势下的热力学量结果基础上，我们进一步研究临界行为，计算得到了 4 个临界指数的值，发现结果满足标度关系并与平均场模型高度符合。

此外，我们还研究了模型的手征动力学。通过引入探子作用量计算得到了手征凝聚与温度和化学势的变化关系，我们的结果定量上可以与 BMW 组的 LQCD 的零化学势结果定性拟合。另外我们还与 HotQCD 组的轻夸克凝聚、s 夸克凝聚与胶子凝聚的 LQCD 相对比，这进一步证明了我们的模型的可靠性。

综上，我们的研究表明，该模型在具有高度可靠性的基础上，可以很好地预言 QCD 相变过程及临界行为，并且能够为夸克凝聚等重要物理现象提供一定的解释。

基于目前的模型，未来还可以继续加入其他因素以探索其对 QCD 相图结构的影响，例如奇异数、磁场的影响，这可以通过额外添加规范场来实现，新加入的场将拓展我们对 QCD 相结构的理解。

另外，考虑到作用量中的势能函数与耦合函数的参数空间巨大，并且以后引入更多规范场将引入更多参数，为了解决这个问题，未来可以引入机器学习等方法，基于神经网络解 ODE (Neural Ordinary Differential Equation, Neural ODE) 的思想，用神经网络重构运动方程，并将与 LQCD 数据的差距作为损失函数，通过优化器使损失函数下降到最小值，此时的势能函数、耦合函数即为

最优的模型。

其次还可以考虑味动力学对背景时空的反作用，这将给出更准确的手征动力学。另外还可以考虑动力学过程中通过重新考虑运动方程对时间的依赖，在给定“源”下，研究系统从非平衡态到平衡态的动力学演化过程，此过程即对应加速器对撞中的动力学演化过程。

参考文献

- [1] Bethke S. The 2009 world average of α_s [J/OL]. European Physical Journal C, 2009, 64(4):689-703. DOI: 10.1140/epjc/s10052-009-1173-1.
- [2] Laermann E, Philipsen O. Lattice QCD at Finite Temperature[J/OL]. Annual Review of Nuclear and Particle Science, 2003, 53:163-198. DOI: 10.1146/annurev.nucl.53.041002.110609.
- [3] DOE/NSF Nuclear Science Advisory Committee T. The Frontiers of Nuclear Science, A Long Range Plan[J/OL]. arXiv e-prints, 2008:arXiv:0809.3137. DOI: 10.48550/arXiv.0809.3137.
- [4] Adams A, Carr L D, Schäfer T, et al. Strongly correlated quantum fluids: ultracold quantum gases, quantum chromodynamic plasmas and holographic duality[J/OL]. New Journal of Physics, 2012, 14(11):115009. DOI: 10.1088/1367-2630/14/11/115009.
- [5] Karch A, Katz E, Son D T, et al. Linear confinement and AdS/QCD[J/OL]. , 2006, 74(1):015005. DOI: 10.1103/PhysRevD.74.015005.
- [6] Borsányi S, Fodor Z, Hoelbling C, et al. Full result for the QCD equation of state with 2+1 flavors[J/OL]. Physics Letters B, 2014, 730:99-104. DOI: 10.1016/j.physletb.2014.01.007.
- [7] Bellwied R, Borsányi S, Fodor Z, et al. Fluctuations and correlations in high temperature QCD[J/OL]. , 2015, 92(11):114505. DOI: 10.1103/PhysRevD.92.114505.
- [8] Borsányi S, Fodor Z, Guenther J N, et al. Lattice QCD Equation of State at Finite Chemical Potential from an Alternative Expansion Scheme[J/OL]. , 2021, 126(23):232001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.126.232001.

- [9] Jones L W. A review of quark search experiments[J/OL]. *Reviews of Modern Physics*, 1977, 49(4):717-752. DOI: 10.1103/RevModPhys.49.717.
- [10] Gell-Mann M. Symmetries of Baryons and Mesons[J/OL]. *Physical Review*, 1962, 125(3):1067-1084. DOI: 10.1103/PhysRev.125.1067.
- [11] Particle Data Group, Zyla P A, Barnett R M, et al. Review of Particle Physics[J/OL]. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2020, 2020(8):083C01. DOI: 10.1093/ptep/ptaa104.
- [12] Augustin J E, Boyarski A M, Breidenbach M, et al. Discovery of a Narrow Resonance in e^+e^- Annihilation[J/OL]. , 1974, 33(23):1406-1408. DOI: 10.1103/PhysRevLett.33.1406.
- [13] Herb S W, Hom D C, Lederman L M, et al. Observation of a Dimuon Resonance at 9.5 GeV in 400-GeV Proton-Nucleus Collisions[J/OL]. , 1977, 39(5):252-255. DOI: 10.1103/PhysRevLett.39.252.
- [14] Abachi S, Abbott B, Abolins M, et al. Observation of the Top Quark[J/OL]. , 1995, 74(14):2632-2637. DOI: 10.1103/PhysRevLett.74.2632.
- [15] Gattringer C, Lang C B. Quantum Chromodynamics on the Lattice: volume 788[M/OL]. 2010. DOI: 10.1007/978-3-642-01850-3.
- [16] 't Hooft G. Dimensional Reduction in Quantum Gravity[J/OL]. *arXiv e-prints*, 1993:gr-qc/9310026. DOI: 10.48550/arXiv.gr-qc/9310026.
- [17] Susskind L. The world as a hologram[J/OL]. *Journal of Mathematical Physics*, 1995, 36(11):6377-6396. DOI: 10.1063/1.531249.
- [18] Maldacena J. The Large-N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity[J/OL]. *International Journal of Theoretical Physics*, 1999, 38: 1113-1133. DOI: 10.1023/A:1026654312961.

- [19] Casalderrey-Solana J, Liu H, Mateos D, et al. Gauge/String Duality, Hot QCD and Heavy Ion Collisions[J/OL]. arXiv e-prints, 2011:arXiv:1101.0618. DOI: 10.48550/arXiv.1101.0618.
- [20] Czakon M. The Four-loop QCD beta-function and anomalous dimensions[J/OL]. Nucl. Phys. B, 2005, 710:485-498. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2005.01.012.
- [21] Bjorken J D. Asymptotic Sum Rules at Infinite Momentum[J/OL]. Physical Review, 1969, 179(5):1547-1553. DOI: 10.1103/PhysRev.179.1547.
- [22] Schuurmans M F H, 't Hooft G W. Simple calculations of confinement states in a quantum well[J/OL]. Phys. Rev. B, 1985, 31:8041-8048. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.31.8041>.
- [23] Gross D J, Wilczek F. Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories [J/OL]. , 1973, 30(26):1343-1346. DOI: 10.1103/PhysRevLett.30.1343.
- [24] Politzer H D. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?[J/OL]. , 1973, 30(26):1346-1349. DOI: 10.1103/PhysRevLett.30.1346.
- [25] Adler S L. Axial-Vector Vertex in Spinor Electrodynamics[J/OL]. Physical Review, 1969, 177(5):2426-2438. DOI: 10.1103/PhysRev.177.2426.
- [26] Greensite J. The confinement problem in lattice gauge theory[J/OL]. Progress in Particle and Nuclear Physics, 2003, 51(1):1-83. DOI: 10.1016/S0146-6410(03)90012-3.
- [27] Wilson K G. Confinement of quarks[J/OL]. Phys. Rev. D, 1974, 10:2445-2459. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.10.2445>.
- [28] Irving A C, Worden R P. Regge phenomenology[J/OL]. , 1977, 34(3):117-231. DOI: 10.1016/0370-1573(77)90010-2.

- [29] STEPHANOV M. Qcd phase diagram: an overview[C/OL]//Proceedings of XXIVth International Symposium on Lattice Field Theory —PoS(LAT2006). 2006. <http://dx.doi.org/10.22323/1.032.0024>.
- [30] Pisarski R D, Wilczek F. Remarks on the chiral phase transition in chromodynamics[J/OL]. , 1984, 29(2):338-341. DOI: 10.1103/PhysRevD.29.338.
- [31] Fukushima K, Hatsuda T. The phase diagram of dense QCD[J/OL]. Reports on Progress in Physics, 2011, 74(1):014001. DOI: 10.1088/0034-4885/74/1/014001.
- [32] Buballa M. NJL-model analysis of dense quark matter [review article][J/OL]. , 2005, 407(4-6):205-376. DOI: 10.1016/j.physrep.2004.11.004.
- [33] Alford M G, Schmitt A, Rajagopal K, et al. Color superconductivity in dense quark matter[J/OL]. Reviews of Modern Physics, 2008, 80(4):1455-1515. DOI: 10.1103/RevModPhys.80.1455.
- [34] Schmidt C, RBC-Bielefeld Collaboration, HotQCD Collaboration. QCD thermodynamics at zero and non-zero density[J/OL]. , 2009, 820(1-4):41-48. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2009.01.017.
- [35] RISCHKE D. The quark–gluon plasma in equilibrium[J/OL]. Progress in Particle and Nuclear Physics, 2004, 52(1):197–296. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ppnp.2003.09.002>.
- [36] Chodos A, Jaffe R L, Johnson K, et al. New extended model of hadrons[J/OL]. , 1974, 9(12):3471-3495. DOI: 10.1103/PhysRevD.9.3471.
- [37] DE RÚJULA A, GLASHOW S L. Is bound charm found?[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 1975, 34:46-49. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.34.46>.
- [38] Nambu Y, Jona-Lasinio G. Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. II[J/OL]. Physical Review, 1961, 124(1):246-254. DOI: 10.1103/PhysRev.124.246.

- [39] Fu W J, Zhang Z, Liu Y X. 2+1 flavor Polyakov Nambu Jona-Lasinio model at finite temperature and nonzero chemical potential[J/OL]. , 2008, 77(1): 014006. DOI: 10.1103/PhysRevD.77.014006.
- [40] Meisinger P N, Ogilvie M C. Chiral symmetry restoration and Z_N symmetry [J/OL]. Physics Letters B, 1996, 379(1):163-168. DOI: 10.1016/0370-2693(96)00447-9.
- [41] Abreu S, Akkelin S V, Alam J, et al. Heavy Ion Collisions at the LHC - Last Call for Predictions[J/OL]. arXiv e-prints, 2007:arXiv:0711.0974. DOI: 10.48550/arXiv.0711.0974.
- [42] Policastro G, Son D T, Starinets A O. Shear Viscosity of Strongly Coupled $N = 4$ Supersymmetric Yang-Mills Plasma[J/OL]. , 2001, 87(8):081601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.081601.
- [43] Wilson K G, Kogut J. The renormalization group and the expansion[J/OL]. , 1974, 12(2):75-199. DOI: 10.1016/0370-1573(74)90023-4.
- [44] Polchinski J. TASI Lectures on D-Branes[J/OL]. arXiv e-prints, 1996:hep-th/9611050. DOI: 10.48550/arXiv.hep-th/9611050.
- [45] Polchinski J. Dirichlet Branes and Ramond-Ramond Charges[J/OL]. , 1995, 75(26):4724-4727. DOI: 10.1103/PhysRevLett.75.4724.
- [46] 't Hooft G. A planar diagram theory for strong interactions[J/OL]. Nuclear Physics B, 1974, 72(3):461-473. DOI: 10.1016/0550-3213(74)90154-0.
- [47] Gubser S S, Klebanov I R, Polyakov A M. Gauge theory correlators from non-critical string theory[J/OL]. Physics Letters B, 1998, 428(1-2):105-114. DOI: 10.1016/S0370-2693(98)00377-3.
- [48] Witten E. Anti-de Sitter space and holography[J/OL]. Advances in Theoretical and Mathematical Physics, 1998, 2:253-291. DOI: 10.48550/arXiv.hep-th/9802150.

- [49] Dewolfe O, Gubser S S, Rosen C. A holographic critical point[J/OL]. , 2011, 83(8):086005. DOI: 10.1103/PhysRevD.83.086005.
- [50] Skenderis K. Lecture Notes on Holographic Renormalization[J/OL]. arXiv e-prints, 2002:hep-th/0209067. DOI: 10.48550/arXiv.hep-th/0209067.
- [51] Mück W, Viswanathan K S. Conformal field theory correlators from classical scalar field theory on anti-de Sitter space[J/OL]. , 1998, 58(4):041901. DOI: 10.1103/PhysRevD.58.041901.
- [52] Freedman D Z, Mathur S D, Matusis A, et al. Correlation functions in the CFT d /AdS $d+1$ correspondence[J/OL]. Nuclear Physics B, 1999, 546(1): 96-118. DOI: 10.1016/S0550-3213(99)00053-X.
- [53] Mück W, Viswanathan K S. Conformal field theory correlators from classical field theory on anti-de Sitter space: Vector and spinor fields[J/OL]. , 1998, 58(10):106006. DOI: 10.1103/PhysRevD.58.106006.
- [54] Sakai T, Sugimoto S. Low Energy Hadron Physics in Holographic QCD[J/OL]. Progress of Theoretical Physics, 2005, 113(4):843-882. DOI: 10.1143/PTP.113.843.
- [55] Sakai T, Sugimoto S. More on a Holographic Dual of QCD[J/OL]. Progress of Theoretical Physics, 2005, 114(5):1083-1118. DOI: 10.1143/PTP.114.1083.
- [56] Babington J, Erdmenger J, Evans N, et al. Chiral symmetry breaking and pions in nonsupersymmetric gauge/gravity duals[J/OL]. , 2004, 69(6):066007. DOI: 10.1103/PhysRevD.69.066007.
- [57] Kruczenski M, Mateos D, Myers R C, et al. Towards a holographic dual of large- N_c QCD[J/OL]. Journal of High Energy Physics, 2004, 2004(5):041. DOI: 10.1088/1126-6708/2004/05/041.
- [58] Erlich J, Katz E, Son D T, et al. QCD and a Holographic Model of Hadrons [J/OL]. , 2005, 95(26):261602. DOI: 10.1103/PhysRevLett.95.261602.

- [59] Gherghetta T, Kapusta J I, Kelley T M. Chiral symmetry breaking in the soft-wall AdS/QCD model[J/OL]. , 2009, 79(7):076003. DOI: 10.1103/PhysRevD.79.076003.
- [60] Kelley T M, Bartz S P, Kapusta J I. Pseudoscalar mass spectrum in a soft-wall model of AdS/QCD[J/OL]. , 2011, 83(1):016002. DOI: 10.1103/PhysRevD.83.016002.
- [61] GUBSER S S, NELLORE A. Mimicking the qcd equation of state with a dual black hole[J/OL]. Physical Review D, 2008. <http://dx.doi.org/10.1103/physrevd.78.086007>.
- [62] Hawking S W. Particle creation by black holes[J/OL]. Communications in Mathematical Physics, 1975, 43(3):199-220. DOI: 10.1007/BF02345020.
- [63] Bekenstein J D. Black Holes and Entropy[J/OL]. , 1973, 7(8):2333-2346. DOI: 10.1103/PhysRevD.7.2333.
- [64] Cai R G, He S, Li L, et al. Probing QCD critical point and induced gravitational wave by black hole physics[J/OL]. , 2022, 106(12):L121902. DOI: 10.1103/PhysRevD.106.L121902.
- [65] Xin X Y, Qin S X, Liu Y X. Quark number fluctuations at finite temperature and finite chemical potential via the Dyson-Schwinger equation approach[J/OL]. , 2014, 90(7):076006. DOI: 10.1103/PhysRevD.90.076006.
- [66] Gao F, Liu Y X. QCD phase transitions via a refined truncation of Dyson-Schwinger equations[J/OL]. , 2016, 94(7):076009. DOI: 10.1103/PhysRevD.94.076009.
- [67] Qin S X, Chang L, Chen H, et al. Phase Diagram and Critical End Point for Strongly Interacting Quarks[J/OL]. , 2011, 106(17):172301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.172301.

- [68] Shi C, Wang Y L, Jiang Y, et al. Locate QCD critical end point in a continuum model study[J/OL]. *Journal of High Energy Physics*, 2014, 2014:14. DOI: 10.1007/JHEP07(2014)014.
- [69] Fischer C S, Luecker J, Welzbacher C A. Phase structure of three and four flavor QCD[J/OL]. , 2014, 90(3):034022. DOI: 10.1103/PhysRevD.90.034022.
- [70] Gao F, Pawłowski J M. QCD phase structure from functional methods[J/OL]. , 2020, 102(3):034027. DOI: 10.1103/PhysRevD.102.034027.
- [71] Li Z, Xu K, Wang X, et al. The kurtosis of net baryon number fluctuations from a realistic Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio model along the experimental freeze-out line[J/OL]. *European Physical Journal C*, 2019, 79(3):245. DOI: 10.1140/epjc/s10052-019-6703-x.
- [72] Masayuki A, Koichi Y. Chiral restoration at finite density and temperature [J/OL]. , 1989, 504(4):668-684. DOI: 10.1016/0375-9474(89)90002-X.
- [73] Fu W J, Pawłowski J M, Rennecke F. QCD phase structure at finite temperature and density[J/OL]. , 2020, 101(5):054032. DOI: 10.1103/PhysRevD.101.054032.
- [74] Zhang H, Hou D, Kojo T, et al. Functional renormalization group study of the quark-meson model with ω meson[J/OL]. , 2017, 96(11):114029. DOI: 10.1103/PhysRevD.96.114029.
- [75] GRIFFITHS R B, WHEELER J C. Critical points in multicomponent systems[J/OL]. *Physical Review A*, 2002, 2(3):1047–1064. <http://dx.doi.org/10.1103/physreva.2.1047>.
- [76] Borsányi S, Fodor Z, Hoelbling C, et al. Is there still any T_c mystery in lattice QCD? Results with physical masses in the continuum limit III[J/OL]. *Journal of High Energy Physics*, 2010, 2010:73. DOI: 10.1007/JHEP09(2010)073.

- [77] Bazavov A, Bhattacharya T, Cheng M, et al. Chiral and deconfinement aspects of the QCD transition[J/OL]. , 2012, 85(5):054503. DOI: 10.1103/PhysRevD.85.054503.
- [78] Bazavov A, Bhattacharya T, DeTar C, et al. Equation of state in $(2 + 1)$ -flavor QCD[J/OL]. , 2014, 90(9):094503. DOI: 10.1103/PhysRevD.90.094503.
- [79] Gubler P, Satow D. Recent progress in QCD condensate evaluations and sum rules[J/OL]. Progress in Particle and Nuclear Physics, 2019, 106:1-67. DOI: 10.1016/j.ppnp.2019.02.005.
- [80] Shifman M A, Vainshtein A I, Zakharov V I. Remarks on Higgs-boson interactions with nucleons[J/OL]. Physics Letters B, 1978, 78(4):443-446. DOI: 10.1016/0370-2693(78)90481-1.
- [81] Cohen T D, Furnstahl R J, Griegel D K. Quark and gluon condensates in nuclear matter[J/OL]. Phys. Rev. C, 1992, 45:1881-1893. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.45.1881>.
- [82] d'Enterria D, Kluth S, Alekhin S, et al. $\alpha_s(2019)$: Precision measurements of the QCD coupling[J/OL]. arXiv e-prints, 2019:arXiv:1907.01435. DOI: 10.48550/arXiv.1907.01435.
- [83] Alekseev A I. Strong Coupling Constant to Four Loops in the Analytic Approach to QCD[J/OL]. Few-Body Systems, 2003, 32(4):193-217. DOI: 10.1007/s00601-003-0005-3.
- [84] Vermaseren J A M, Larin S A, van Ritbergen T. The 4-loop quark mass anomalous dimension and the invariant quark mass[J/OL]. Physics Letters B, 1997, 405:327-333. DOI: 10.1016/S0370-2693(97)00660-6.