

# 基于非凸低秩矩阵分解的 图像显著性目标检测模型研究

答辩学生：张尧      指导老师：李敏

数学与统计学院

深圳大学

2019 年 5 月 6 日



# 目录

- 1 简介
- 2 低秩模型的理论基础
- 3 一种基于非凸和谱稀疏矩阵分解的图像显著性检测模型
- 4 一种基于双因子矩阵分解的非凸图像显著性检测模型
- 5 总结与展望



# 什么是显著性目标?

随着人工智能技术的发展,我们不仅希望可以进行智能计算,同时希望计算机可以像我们人类一样对某些事物作出正确的判断.例如,当我们面对一幅图像时,注意力很快会被图像上“不一样”的部分所吸引.因此,当我们把这幅图像输入计算机时,希望计算机可以很快地识别这张图像中“不一样”的部分.而这些“不一样”的部分,在某种意义下就是这张图片的显著性目标.

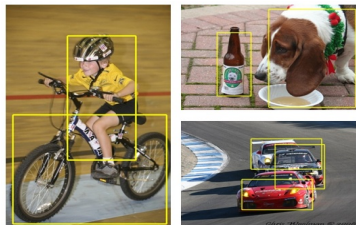


Figure 1: 显著性目标的例子.



# 什么是显著性目标检测?

显著性目标检测是计算机视觉的一项任务, 主要包括两个步骤:

- ① 检测出图像中的显著性目标物体
- ② 然后准确的把显著性物体分割出来

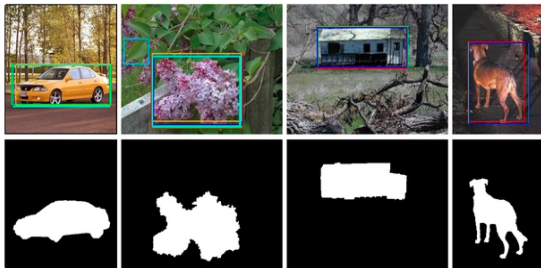


Figure 2: 图像显著性目标检测的几个例子

# 为什么低秩模型在显著性目标检测中有效?

在常见的图像显著性目标检测数据集中, 若把每幅图像分割成  $10 \times 10$  窗口大小的图像块, 然后将扣除掉 Groundtruth 中显著性物体的区域作后 (这其实是对图像的背景进行分割成小的图像块). 然后我们对图像背景的秩  $\tilde{r}$  进行估计:

$$\tilde{r} = \underset{r}{\operatorname{arg\,min}} \operatorname{RMSRE}(r-1) - \operatorname{RMSRE}(r) \leq \varepsilon \quad (1)$$

其中  $\operatorname{RMSRE}$  是重建后和原始背景的均方误差,  $\varepsilon$  取 0.01.



# 为什么低秩模型在显著性目标检测中有效?

这样估计估计后我们得到下图, 从图中我们可以清晰的看到 90% 的背景矩阵的秩小于 10.

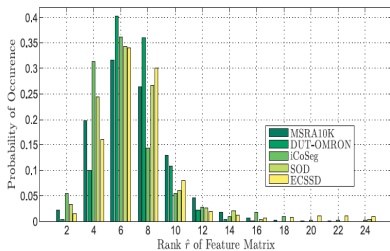


Figure 3: 不同背景矩阵的秩出现的概率.



# 图像的显著性目标低秩检测模型

从上图可知, 图像的背景部分具有低秩结构, 那么图像的显著性物体部分是由少量的非 0 元素构成. 于是, 图像的显著性检测可以表示成

$$\begin{aligned} \min_{L,S} \text{rank}(L) + \lambda \text{Sparse}(S) \\ \text{s.t. } F = L + S \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$  是图像特征空间下的矩阵表示;  $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$  是背景部分, 用秩函数来刻画;  $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$  是显著性目标, 用稀疏性来表示;  $\lambda$  是平衡参数.



# 低秩模型的理论基础

不幸的是, 问题 (2) 是非凸问题且是 NP 难的问题. 我们简要说明一下该问题的非凸性.

## Example 1

给定矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  and  $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

我们可以得到

$$\text{rank} \left( \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B \right) = \text{rank} \left( \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \right) = 2 \quad (3)$$

但是

$$\frac{1}{2} \text{rank}(A) + \frac{1}{2} \text{rank}(B) = \frac{1}{2} \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \quad (4)$$

显然  $2 > 1$ . 同时我们也可以得到

$$\left\| \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B \right\|_0 = \left\| \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \right\|_0 = 2 > \frac{1}{2} \|A\|_0 + \frac{1}{2} \|B\|_0 = 1 \quad (5)$$





## 问题 (2) 的凸松弛

可以证明下述问题:

$$\min_{L,S} \|L\|_* + \lambda \|S\|_1 \quad F = L + S \quad (6)$$

的解也是问题2的解, 其中  $\|\cdot\|_*$  是核函数, 即矩阵的奇异值之和,  $\|\cdot\|_1$  是矩阵的绝对值之和.

### Proposition 1 ([Hastie, 2015])

$$\|L\|_* = \sup_{\|M\| \leq 1} \langle L, M \rangle \quad (7)$$

其中  $\|\cdot\|$  是矩阵的算子范数, 即最大的奇异值.

利用性质 1 可以证明  $\|\cdot\|_*$  是凸函数.



# 常见的低的秩模型

一些常见的低秩模型：

- 1 Rank( $X$ )  $\rightarrow \|X\|_*$
- 2 Rank( $X$ )  $\rightarrow \|X\|_* - (\sigma_1 + \dots + \sigma_k)$
- 3 Rank( $X$ )  $\rightarrow$  Schatten-p norm
- 4 Rank( $X$ )  $\rightarrow \sum_{i=1}^r \log(1 + \sigma_i^2)$
- 5 Rank( $X$ )  $\rightarrow \log \det(I + X^T X)$
- 6 Rank( $X$ )  $\rightarrow \log \det(\text{diag}(Y, Z) + \delta I)$  where  $\begin{bmatrix} Y & X \\ X^T & Z \end{bmatrix} \succeq 0$
- 7 Rank( $X$ )  $\rightarrow \dots$



# Schatten-q 范数简介

给定矩阵  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  的 Schatten-q 范数被定义为:

$$\|X\|_{S_q} = \left( \sum_{i=1}^{\min\{m,n\}} \sigma_i^q(X) \right)^{1/q} \quad (8)$$

其中  $\sigma_i(X)$  是矩阵  $X$  的第  $i$  个奇异值. 我们给出  $q \in [0, 2]$  时,  $\|X\|_{S_q}$  的一些具体形式, 见下表.

Table 1:  $\|X\|_{S_q}$  ( $q \in [0, 2]$ ).

$q$	$\ X\ _{S_q}$
0	$\ X\ _{S_0} = \ \sigma\ _{l_0}$ Rank
$(0, 1)$	$\ X\ _{S_q} = \left( \sum \sigma_k^q \right)^{\frac{1}{q}}$ Schatten-q quasi-norm
1	$\ X\ _* = \sum \sigma_k$ Nuclear norm
2	$\ X\ _F = \sqrt{\sum \sigma_k^2}$ Frobenius norm

# Schatten- $q$ ( $0 < q < 1$ ) 拟范数的一些性质

通过一个例子, 我们可以说明 Schatten- $q$  ( $0 < q < 1$ ) 范数不满足范数的定义.

## Example 2

给定  $p = \frac{1}{2}$ ,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \Sigma_A + \Sigma_B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

我们可以得到:

$$(\Sigma_A)_{S_{1/2}} + (\Sigma_B)_{S_{1/2}} = 6 + \sqrt{2}, (\Sigma_A + \Sigma_B)_{S_{1/2}} = 4 + 2\sqrt{3} \quad (10)$$

但是

$$(\Sigma_A + \Sigma_B)_{S_{1/2}} > (\Sigma_A)_{S_{1/2}} + (\Sigma_B)_{S_{1/2}} \quad (11)$$



# Schatten- $q$ ( $0 < q < 1$ ) 拟范数的一些性质

然而, 我们有

## Theorem 1

给定实数  $a, b \geq 0$ , 对任意  $0 < p < 1$  我们有

$$(a + b)^p \leq a^p + b^p \quad (12)$$

## Remark 1

若  $(a + b)^p - a^p \leq b^p$ , 则  $\lim_{b \rightarrow 0} [(a + b)^p - a^p] = 0$ . 于是我们可以得到

$\|\cdot\|_{S_p}^p$  ( $0 < p < 1$ ) 是连续函数.



# 有关 $\|\cdot\|_{S_p}^p$ ( $0 < p \leq 1$ ) 的几个结果

Theorem 2 ([Hastie, 2015, Shang, 2018, Shang, 2018])

矩阵  $U \in \mathbb{R}^{m \times d}$ ,  $V \in \mathbb{R}^{n \times d}$ ,  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  的秩  $\text{rank}(X) = r \leq d$ , 则下面的式子成立:

$$\begin{aligned}\|X\|_* &= \min_{U, V, X=UV^T} \frac{\|U\|_F^2}{2} + \frac{\|V\|_F^2}{2} \\ \|X\|_{S_{2/3}}^{2/3} &= \min_{U, V, X=UV^T} \frac{2}{3} \|U\|_* + \frac{1}{3} \|V\|_F^2 \\ \|X\|_{S_{1/2}}^{1/2} &= \min_{U, V, X=UV^T} \frac{1}{2} \|U\|_* + \frac{1}{2} \|V\|_*\end{aligned}\tag{13}$$

其中  $\|\cdot\|_*$  是核范数,  $\|\cdot\|_F$  是 Frobenius 范数.



# 一种基于非凸和谱稀疏矩阵分解的图像显著性检测模型

我们的模型:

$$\min_{L,S} \|L\|_{S_q}^q + \alpha \sum_{j=1}^n v_j \|S_{G_j}\|_{\infty} + \beta \text{Tr}(SQ_F S^T) \quad \text{s.t.} \quad F = L + S \quad (14)$$

其中  $G_j$  是图割的第  $j$  个节点,  $v_j > 0$  是节点  $G_j$  先验权重,  $S_{G_j}$  是  $S$  的子矩阵,  $S_{G_j} \in D \times |G_j|$  ( $|\cdot|$  是集合的基数),  $n$  是节点数,  $\|\cdot\|_p$  是  $l_p$ -范数, 用来体现组内图像块的相似程度. 事实上,  $p$  取  $\infty$ , 可以很好地捕获图像块在空间上的连续性和特征相似程度.



$$v_j = 1 - \max(\{\pi_k : k \in G_j\}). \quad (15)$$

$\pi_i$  在 (15) 中表示图像块  $P_i$  基于高层先验信息属于显著性目标的似然程度. 这种加权的谱稀疏范数的优点见下图.

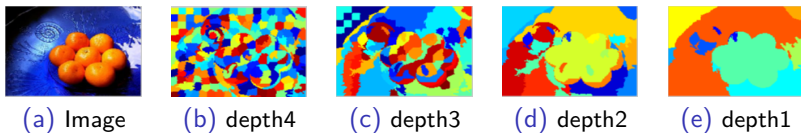


Figure 4: 加权谱稀疏的效果





# 我们的模型

另外, 为了扩大显著性目标和背景部分的距离, 我们采用了 Laplacian 正则项  $Tr(SQ_F S^T)$ , ( $Tr(\cdot)$  矩阵的迹函数). Laplacian 矩阵  $Q_F$ :

$$(Q_F)_{i,j} = \begin{cases} -w_{ij}, & \text{if } i \neq j \\ \sum_{j \neq i} w_{i,j}, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (16)$$

$w_{i,j}$  表示图像块  $(P_i, P_j)$  的相似程度, i.e.

$$w_{i,j} = \begin{cases} \exp\left(-\frac{\|f_i - f_j\|^2}{2\delta^2}\right) & \text{if } (P_i, P_j) \in V \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (17)$$

其中  $V$  是相邻图像块的集合.

# 我们的模型

根据定理 2, 我们的模型可以写成下面三种形式:

- $q = 1$ ,

$$\begin{aligned} \min_{U, V, S, H} \frac{1}{2} (\|U\|_F^2 + \|V\|_F^2) + \alpha \sum_{j=1}^n v_j \|S_{G_j}\|_\infty + \beta \text{Tr}(HQ_F H^T) \\ \text{s.t. } F = UV^T + S, S = H. \end{aligned} \quad (18)$$

- $q = 2/3$ ,

$$\begin{aligned} \min_{U, V, S, M, H} \frac{1}{3} (2\|M\|_* + \|V\|_F^2) + \alpha \sum_{j=1}^n v_j \|S_{G_j}\|_\infty + \beta \text{Tr}(HQ_F H^T) \\ \text{s.t. } F = UV^T + S, M = U, S = H. \end{aligned} \quad (19)$$

- $q = 1/2$ ,

$$\begin{aligned} \min_{U, V, S, M, N, H} \frac{1}{2} (\|M\|_* + \|N\|_*) + \alpha \sum_{j=1}^n v_j \|S_{G_j}\|_\infty + \beta \text{Tr}(HQ_F H^T) \\ \text{s.t. } F = UV^T + S, M = U, N = V, S = H. \end{aligned} \quad (20)$$



问题 (18) 的增广 Lagrangian 函数:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(U, V, S, H, Y_1, Y_2, \mu) = & \frac{1}{2}(\|U\|_F^2 + \|V\|_F^2) + \alpha \sum_{j=1}^n v_j \|S_{G_j}\|_\infty + \\ & \beta \text{Tr}(HQ_F H^T) + \langle Y_1, F - UV^T - S \rangle + \langle Y_2, S - H \rangle + \\ & \frac{\mu}{2}(\|F - UV^T - S\|_F^2 + \|S - H\|_F^2) \end{aligned} \quad (21)$$

其中  $Y_1, Y_2$  是 Lagrange 乘子,  $\mu > 0$  是惩罚参数.

---

**Algorithm 1** 问题 (21) 通过 ADMM 算法求解.

---

**Input:**  $F, d, \alpha, \beta$  and  $\mu_0, S_0 = H_0 = Y_1^0 = Y_2^0 = 0, \mu_{\max} = 10^{10}, \rho = 1.1$  and  $k = 0$

- 1: **while** not converged **do**
- 2:   update  $U_{k+1}$
- 3:   update  $V_{k+1}$
- 4:   update  $S_{k+1}$
- 5:   update  $H_{k+1}$
- 6:   update  $Y_1^{k+1}$  by  $Y_1 \leftarrow Y_1 + \mu (F - UV^T - S)$
- 7:   update  $Y_2^{k+1}$  by  $Y_2 \leftarrow Y_2 + \mu (S - H)$
- 8:   update  $\mu_{k+1}$  by  $\mu \leftarrow \min(\rho\mu, \mu_{\max})$
- 9:   update  $k$  by  $k \leftarrow k + 1$
- 10: **end while**

**Output:**  $U, V$  and  $S$

---

# 模型求解

问题 (19) 的增广 Lagrangian 函数可以写成:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{2/3}(U, V, S, M, H, Y_1, Y_2, Y_3, \mu) &= \frac{1}{3}(2\|M\|_* + \|V\|_F^2) + \alpha \sum_{j=1}^n v_j \|S_{G_j}\|_\infty \\ &+ \beta \text{Tr}(HQ_F H^T) + \langle Y_1, F - UV^T - S \rangle + \langle Y_2, M - U \rangle + \langle Y_3, S - H \rangle \\ &+ \frac{\mu}{2}(\|F - UV^T - S\|_F^2 + \|M - U\|_F^2 + \|S - H\|_F^2),\end{aligned}\tag{22}$$

其中  $Y_1, Y_2, Y_3$  是 Lagrange 乘子,  $\mu > 0$  是惩罚参数.

---

**Algorithm 2** Problem (22) solved by ADMM.

---

**Input:**  $F, d, \alpha, \beta$  and  $\mu_0, M_0 = Y_2^0 = 0, S_0 = H_0 = Y_1^0 = Y_3^0 = 0, \mu_{max} = 10^{10}, \rho = 1.1$  and  $k = 0$

- 1: **while** not converged **do**
- 2:     update  $U_{k+1}$
- 3:     update  $V_{k+1}$
- 4:     update  $S_{k+1}$
- 5:     update  $M_{k+1}$  by 软阈值算法 (SVT)
- 6:     update  $H_{k+1}$
- 7:     update  $Y_1^{k+1}$  by  $Y_1 \leftarrow Y_1 + \mu (F - UV^T - S)$
- 8:     update  $Y_2^{k+1}$  by  $Y_2 \leftarrow Y_2 + \mu (M - U)$
- 9:     update  $Y_3^{k+1}$  by  $Y_3 \leftarrow Y_3 + \mu (S - H)$
- 10:    update  $\mu_{k+1}$  by  $\mu \leftarrow \min(\rho\mu, \mu_{max})$
- 11:    update  $k$  by  $k \leftarrow k + 1$
- 12: **end while**

**Output:**  $U, V$  and  $S$

---



问题 (20) 的增广 Lagrangian 函数是:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1/2}(U, V, S, M, N, H, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, \mu) = & \frac{1}{2}(\|M\|_* + \|N\|_*) + \\ & \alpha \sum_{j=1}^n v_j \|S_{G_j}\|_\infty + \beta \text{Tr}(HQ_F H^T) + \langle Y_1, F - UV^T - S \rangle + \\ & \langle Y_2, M - U \rangle + \langle Y_3, N - V \rangle + \langle Y_4, S - H \rangle + \\ & \frac{\mu}{2}(\|F - UV^T - S\|_F^2 + \|M - U\|_F^2 + \|N - V\|_F^2 + \|S - H\|_F^2) \end{aligned} \quad (23)$$

其中  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$  是 Lagrange 乘子,  $\mu > 0$  惩罚参数.

---

**Algorithm 3** Problem (23) solved by ADMM.

---

**Input:**  $F, d, \alpha, \beta$  and  $\mu_0, M_0 = Y_2^0 = 0, N_0 = Y_3^0 = 0, S_0 = H_0 = Y_1^0 = Y_4^0 = 0, \mu_{\max} = 10^{10}, \rho = 1.1$  and  $k = 0$

1: **while** not converged **do**  
2:     update  $U_{k+1}$   
3:     update  $V_{k+1}$   
4:     update  $S_{k+1}$   
5:     update  $M_{k+1}$  by 软阈值算法 (SVT)  
6:     update  $N_{k+1}$  by 软阈值算法 (SVT)  
7:     update  $H_{k+1}$   
8:      $Y_1^{k+1}$  by  $Y_1 \leftarrow Y_1 + \mu (F - UV^T - S)$   
9:      $Y_2^{k+1}$  by  $Y_2 \leftarrow Y_2 + \mu (M - U)$   
10:     $Y_3^{k+1}$  by  $Y_3 \leftarrow Y_3 + \mu (N - V)$   
11:     $Y_4^{k+1}$  by  $Y_4 \leftarrow Y_4 + \mu (S - H)$   
12:     $\mu_{k+1}$  by  $\mu \leftarrow \min(\rho\mu, \mu_{\max})$   
13:     $k$  by  $k \leftarrow k + 1$   
14: **end while**

**Output:**  $U, V$  and  $S$





由上述算法可知, 每个子问题都有闭式解. 由于这三个算法具有相似的迭代步骤, 因此我们就最复杂的算法3 进行收敛性分析.

## Theorem 3

$\{U_k\}, \{V_k\}, \{S_k\}, \{M_k\}, \{N_k\}, \{H_k\}$  是算法 3 生成的序列. 若  $\{Y_i^k\}$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) 有界, 且  $\mu_k$  是非递减序列,  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_{k+1}}{\mu_k^2} < \infty$ , 那么  $\{U_k\}, \{V_k\}, \{S_k\}, \{M_k\}, \{N_k\}, \{H_k\}$  有界.



## Theorem 4

$\{U_k\}, \{V_k\}, \{S_k\}, \{M_k\}, \{N_k\}, \{H_k\}$  是算法 3 生成的序列. 若序列  $\{Y_i^k\}$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) 有界,  $\mu_k$  是非递减序列且  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_{k+1}}{\mu_k^2} < \infty$ , 那么  $\{U_k\}, \{V_k\}, \{S_k\}, \{M_k\}, \{N_k\}, \{H_k\}$  是 Cauchy 列.



# 实验框架

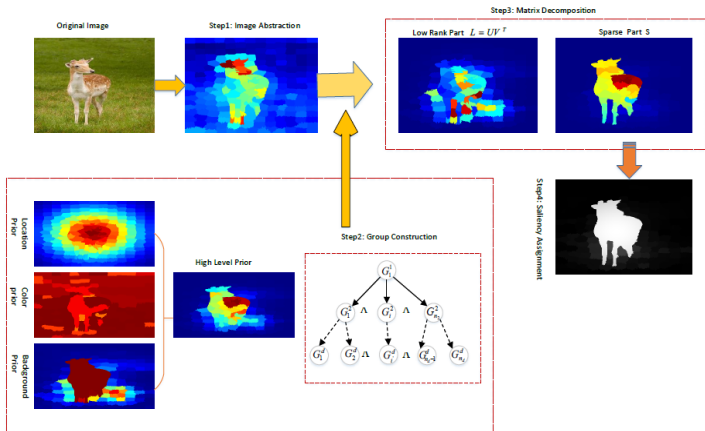


Figure 5: Framework.



# 视觉效果比较

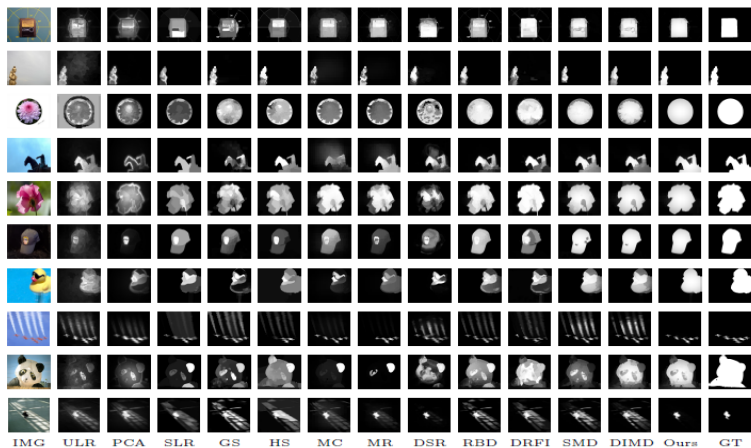


Figure 6: Visual comparison of saliency maps in which ours appear to be very close to the ground truth.

# 与其他低秩方法数值指标比较

Table 2: 与其他低秩方法性能的比较

Dataset	ECSSD				THUR15K				PASCAL-S			
	WF $\uparrow$	OR $\uparrow$	AUC $\uparrow$	MAE $\downarrow$	WF $\uparrow$	OR $\uparrow$	AUC $\uparrow$	MAE $\downarrow$	WF $\uparrow$	OR $\uparrow$	AUC $\uparrow$	MAE $\downarrow$
ULR	0.351	0.347	0.755	0.312	0.259	0.325	0.801	0.249	0.351	0.295	0.718	0.320
SLR	0.442	0.474	0.764	0.252	0.387	0.433	0.823	0.167	0.398	0.390	0.711	0.275
DIMD	0.534	0.548	0.819	0.181	0.430	0.458	0.829	0.166	0.500	0.451	0.738	0.245
SMD	0.517	0.523	0.775	0.227	0.434	<b>0.466</b>	0.823	<b>0.159</b>	0.486	0.446	0.730	0.246
Ours $q = 1$	<b>0.542</b>	<b>0.563</b>	0.813	0.174	<b>0.436</b>	<b>0.466</b>	0.824	0.160	0.494	0.447	0.733	0.245
Ours $q = 2/3$	<b>0.542</b>	0.562	0.813	<b>0.173</b>	0.435	0.463	0.825	0.163	0.500	0.449	0.734	<b>0.244</b>
Ours $q = 1/2$	0.540	0.554	<b>0.820</b>	0.179	0.432	0.459	<b>0.831</b>	0.167	<b>0.503</b>	<b>0.453</b>	<b>0.740</b>	0.245

Dataset	iCoSeg				MSRA10K				DUT-OMRON			
	WF $\uparrow$	OR $\uparrow$	AUC $\uparrow$	MAE $\downarrow$	WF $\uparrow$	OR $\uparrow$	AUC $\uparrow$	MAE $\downarrow$	WF $\uparrow$	OR $\uparrow$	AUC $\uparrow$	MAE $\downarrow$
ULR	0.379	0.443	0.814	0.222	0.425	0.524	0.831	0.141	0.254	0.318	0.805	0.260
SLR	0.473	0.505	0.805	0.179	0.601	0.691	0.840	0.224	0.392	0.429	<b>0.822</b>	<b>0.161</b>
DIMD	0.603	0.594	0.827	0.141	<b>0.761</b>	0.733	0.836	<b>0.087</b>	0.398	0.415	0.807	0.183
SMD	0.611	0.598	0.822	0.138	0.704	0.741	0.847	0.104	<b>0.424</b>	<b>0.441</b>	0.809	0.166
Ours $q = 1$	0.613	0.597	0.824	0.138	0.701	0.741	0.848	0.105	0.422	0.440	0.812	0.170
Ours $q = 2/3$	<b>0.626</b>	<b>0.608</b>	0.829	<b>0.133</b>	0.705	<b>0.744</b>	0.848	0.103	0.423	0.440	0.812	0.171
Ours $q = 1/2$	0.612	0.600	<b>0.833</b>	0.139	0.695	0.734	<b>0.852</b>	0.109	0.405	0.424	0.815	0.183

$\uparrow$  值越大越好, 而  $\downarrow$  值越小越好.

# 与非深度学习方法的数值指标比较

Table 3: 与非深度学习方法的性能比较.

Dataset	ECSSD				THUR15K				PASCAL-S			
	WF $\uparrow$	OR $\uparrow$	AUC $\uparrow$	MAE $\downarrow$	WF $\uparrow$	OR $\uparrow$	AUC $\uparrow$	MAE $\downarrow$	WF $\uparrow$	OR $\uparrow$	AUC $\uparrow$	MAE $\downarrow$
PCA	0.358	0.371	0.759	0.291	0.298	0.362	0.822	0.198	0.353	0.352	0.719	0.296
GS	0.436	0.435	0.758	0.255	0.370	0.387	0.814	0.176	0.456	0.418	0.734	0.262
HS	0.449	0.432	0.766	0.269	0.365	0.402	0.801	0.218	0.451	0.349	0.733	0.286
MC	0.441	0.495	0.779	0.251	0.349	0.444	0.834	0.184	0.423	0.412	0.740	0.272
MR	0.480	0.491	0.761	0.235	0.378	0.426	0.796	0.178	0.446	0.431	0.722	0.265
DSR	0.489	0.480	0.754	0.227	0.423	0.426	0.803	0.142	0.439	0.409	0.712	0.258
RBD	0.490	0.494	0.752	0.225	0.421	0.431	0.804	0.150	0.474	0.442	0.725	0.247
DRFI	0.517	0.527	0.780	0.217	0.432	0.481	0.856	0.147	0.449	0.432	0.749	0.258
Ours	0.542	0.562	0.813	0.173	0.435	0.463	0.825	0.163	0.500	0.449	0.734	0.244

$\uparrow$  越大越好, 而  $\downarrow$  越小越好

最好的三个结果用 red, green 和 blue 分别表示, 我们的方法  $q = 2/3$ .



# 与非深度学习方法的数值指标比较

Table 4: 与非深度学习方法的性能比较.

Dataset	iCoSeg				MSRA10K				DUT-OMRON			
	WF $\uparrow$	OR $\uparrow$	AUC $\uparrow$	MAE $\downarrow$	WF $\uparrow$	OR $\uparrow$	AUC $\uparrow$	MAE $\downarrow$	WF $\uparrow$	OR $\uparrow$	AUC $\uparrow$	MAE $\downarrow$
PCA	0.407	0.427	0.798	0.201	0.473	0.576	0.839	0.185	0.287	0.341	0.827	0.207
GS	0.519	0.520	0.819	0.167	0.606	0.664	0.839	0.139	0.363	0.372	0.814	0.173
HS	0.536	0.537	0.812	0.176	0.604	0.656	0.833	0.149	0.350	0.397	0.801	0.227
MC	0.461	0.543	0.807	0.179	0.576	0.694	0.843	0.145	0.347	0.425	0.820	0.186
MR	0.554	0.573	0.795	0.162	0.642	0.693	0.824	0.125	0.381	0.420	0.779	0.187
DSR	0.548	0.514	0.801	0.153	0.656	0.654	0.825	0.121	0.419	0.408	0.803	0.139
RBD	0.599	0.588	0.827	0.138	0.685	0.716	0.834	0.108	0.427	0.432	0.814	0.144
DRFI	0.592	0.582	0.839	0.139	0.666	0.723	0.857	0.114	0.424	0.444	0.839	0.138
Ours	0.626	0.608	0.829	0.133	0.705	0.744	0.848	0.103	0.423	0.440	0.812	0.171

$\uparrow$  越大越好, 而  $\downarrow$  越小越好

最好的三个结果用 red, green 和 blue 分别表示, 我们的方法  $q = 2/3$ .



# 一种基于双因子矩阵分解的非凸图像显著性检测模型

我们的模型是

$$\begin{aligned} \min_{L,S} & \|L\|_{S_{2/3}}^{2/3} + \lambda \|S\|_{l_{2/3}}^{2/3} + \gamma \text{Tr}(SQ_F S^T) \\ \text{s.t.} & F = L + S. \end{aligned} \quad (24)$$

其中  $L$  表示图像的背景部分,  $S$  表示图像的显著性目标部分, 为了拉开背景和显著性目标的距离, 我们加入  $Q_F$  是 Laplacian 正则项.

根据定理 2, 我们的模型, 即 (24) 可以写成下面的形式:

$$\begin{aligned} \min_{U,V,S} & \frac{1}{3} \left( 2\|V\|_* + \|U\|_F^2 \right) + \lambda \|S\|_{l_{2/3}}^{2/3} + \gamma \text{Tr}(SQ_F S^T) \\ \text{s.t.} & F = L + S, L = UV^T. \end{aligned} \quad (25)$$





# 模型求解

问题 (25) 可以写成下面的形式:

$$\begin{aligned} \min_{U, V, S, M, H} \quad & \frac{1}{3} \left( 2\|M\|_* + \|V\|_F^2 \right) + \lambda \|S\|_{l_{2/3}}^{2/3} + \gamma \text{Tr} \left( HQ_F H^T \right) \\ \text{s.t.} \quad & F = L + S, L = UV^T, M = U, S = H. \end{aligned} \quad (26)$$

(26) 的增广 Lagrangian 函数可以写成:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2/3} (U, V, L, S, M, H, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, \mu) = & \\ \frac{1}{3} \left( 2\|M\|_* + \|V\|_F^2 \right) + \lambda \|S\|_{l_{2/3}}^{2/3} + \gamma \text{Tr} \left( HQ_F H^T \right) & \\ + \langle Y_1, F - L - S \rangle + \langle Y_2, L - UV^T \rangle + \langle Y_3, M - U \rangle & \\ + \langle Y_4, S - H \rangle + \frac{\mu}{2} \left( \|F - L - S\|_F^2 + \|L - UV^T\|_F^2 \right. & \\ \left. + \|M - U\|_F^2 + \|S - H\|_F^2 \right), & \end{aligned} \quad (27)$$

其中  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$  是 Lagrange 乘子,  $\mu > 0$  惩罚参数.

---

## Algorithm 4 Problem (27) solved by ADMM.

---

**Input:**  $F, d, \alpha, \beta$  and  $\mu$   $M_0 = Y_2^0 = 0, N_0 = Y_3^0 = 0, S_0 = H_0 = Y_1^0 = Y_4^0 = 0, \mu_{max} = 10^{10}, \rho = 1.1$  and  $k = 0$

- 1: **while** not converged **do**
- 2:   update  $U_{k+1}$
- 3:   update  $V_{k+1}$
- 4:   update  $L_{k+1}$
- 5:   update  $S_{k+1}$  by Theorem 5
- 6:   update  $M_{k+1}$  by 软阈值算法 (SVT)
- 7:   update  $H_{k+1}$
- 8:   update  $Y_i, 1 \leq i \leq 4$  by the following forms, i.e.

$$Y_1 \leftarrow Y_1 + \mu (F - L - S) \quad Y_2 \leftarrow Y_2 + \mu (L - UV^T)$$

$$Y_3 \leftarrow Y_3 + \mu (M - U) \quad Y_4 \leftarrow Y_4 + \mu (S - H)$$

- 9:    $\mu_{k+1}$  by  $\mu \leftarrow \min(\rho\mu, \mu_{max})$
  - 10:   $k$  by  $k \leftarrow k + 1$
  - 11: **end while**
- Output:**  $L$  and  $S$
- 



## Theorem 5 ([Shang, 2018])

矩阵  $A, X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , 下述极小化问题

$$\min_X \|X - A\|_F^2 + \tau \|X\|_{2/3}^{2/3} \quad (28)$$

的解是  $\mathcal{T}(A)$ , 其中  $\mathcal{T}(\cdot)$  是

$$\mathcal{T}(a) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sgn}(a) \left( \varphi_\tau(a) + \sqrt{\frac{2|a|}{\varphi_\tau(a)} - \varphi_\tau^2(a)} \right)^3}{8} & |a| > \frac{2\sqrt[4]{3\tau^3}}{3} \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (29)$$

其中  $\varphi_\tau(a) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\sqrt{\tau} \cosh \left( \operatorname{arccos} h \frac{\left( \frac{27a^2}{16} \tau - \frac{3}{2} \right)}{3} \right)}$ .

## Theorem 6

$\{(U^k, V^k, L^k, S^k, M^k, H^k, \{Y_i^k\})\}$  是算法 4 生成的序列. 若  $\{Y_i^k\}$  有界,  $\mu_k$  是非递减序列, 且  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_{k+1}}{\mu_k^2} < \infty$ , 那么上述算法产生的极限点  $(U_{\infty}, V_{\infty}, L_{\infty}, S_{\infty}, M_{\infty}, H_{\infty})$  满足下面的 KKT 条件:

$$0 \in \frac{2}{3} \partial \|M_{\infty}\|_* + Y_3^{\infty},$$

$$0 \in \lambda \partial \|S_{\infty}\|_{l_{2/3}}^{2/3} + Y_1^{\infty} + Y_4^{\infty},$$

$$0 \in \gamma (H_{\infty} Q_F^T + H_{\infty} Q_F) + Y_4^{\infty},$$

$$L_{\infty} = U_{\infty} V_{\infty}^T, M_{\infty} = U_{\infty}, S_{\infty} = H_{\infty}, L_{\infty} + S_{\infty} = F_{\infty}.$$



# 实验框图

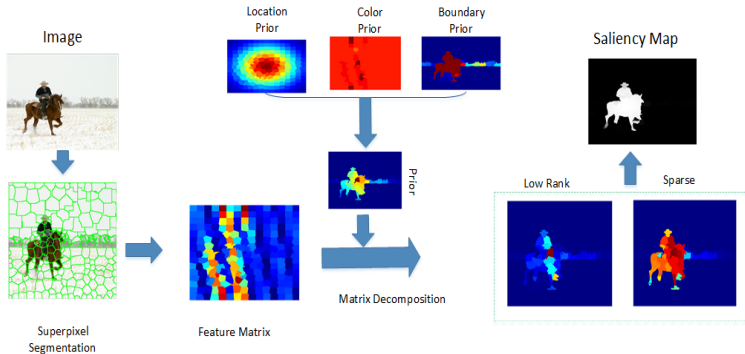


Figure 7: Framework.

# 视觉效果

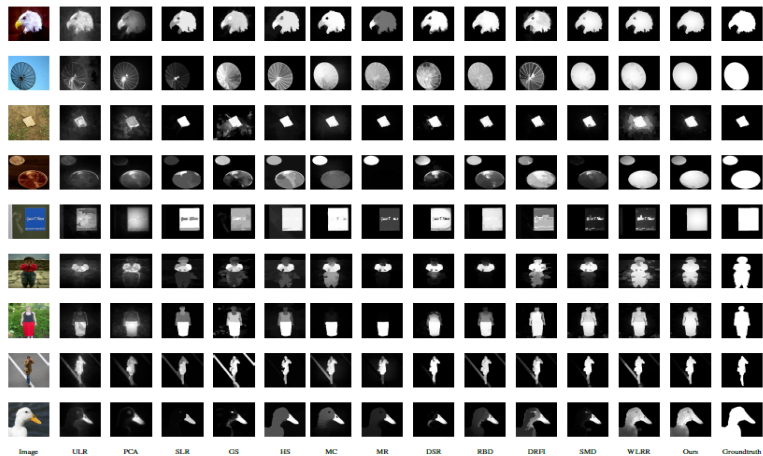


Figure 8: Visual comparison of saliency maps in which ours appear to be very close to the ground truth.

# 数值指标比较

Table 5: 不同方法在数据集 ECSSD 上的性能比较

Metric	Ours	WLRR	SMD	DRFI	RBD	HCT	DSR	MC	MR	HS	PCA	TD	GC	RC
WF $\uparrow$	0.527	0.500	0.517	0.517	0.490	0.430	0.489	0.441	0.480	0.449	0.358	0.413	0.437	0.320
OR $\uparrow$	0.542	0.499	0.523	0.527	0.494	0.457	0.480	0.495	0.491	0.432	0.371	0.398	0.376	0.265
AUC $\uparrow$	0.820	0.819	0.775	0.780	0.752	0.755	0.754	0.779	0.761	0.766	0.759	0.717	0.685	0.749
MAE $\downarrow$	0.187	0.211	0.227	0.217	0.225	0.249	0.227	0.251	0.235	0.269	0.291	0.271	0.256	0.334
Metric	Ours	ULR	SLR	LRR	SVO	GS	SF	CB	CA	SS	SEG	FT	SR	LC
WF $\uparrow$	0.527	0.351	0.442	0.398	0.316	0.436	0.307	0.403	0.304	0.134	0.323	0.199	0.138	0.242
OR $\uparrow$	0.542	0.347	0.474	0.442	0.084	0.435	0.271	0.419	0.254	0.099	0.206	0.212	0.171	0.206
AUC $\uparrow$	0.820	0.755	0.764	0.756	0.753	0.758	0.725	0.762	0.702	0.561	0.719	0.600	0.562	0.585
MAE $\downarrow$	0.187	0.312	0.252	0.254	0.427	0.255	0.329	0.282	0.343	0.320	0.369	0.312	0.308	0.332

$\uparrow$  越大越好, 而  $\downarrow$  越小越好  
最好的三个结果用 red, green 和 blue 分别表示.



Table 6: 不同方法在数据集 iCoSeg 上的性能比较

Metric	Ours	WLRR	SMD	DRFI	RBD	HCT	DSR	MC	MR	HS	PCA	TD	GC	RC
WF $\uparrow$	<b>0.608</b>	0.602	<b>0.611</b>	0.592	0.599	0.464	0.548	0.461	0.554	0.536	0.407	0.499	0.522	0.395
OR $\uparrow$	<b>0.604</b>	0.578	<b>0.598</b>	0.582	<b>0.588</b>	0.519	0.514	0.543	0.573	0.537	0.427	0.506	0.487	0.402
AUC $\uparrow$	<b>0.835</b>	<b>0.843</b>	0.822	<b>0.839</b>	0.827	0.833	0.801	0.807	0.795	0.812	0.798	0.817	0.765	0.829
MAE $\downarrow$	<b>0.138</b>	<b>0.147</b>	<b>0.138</b>	<b>0.139</b>	<b>0.138</b>	0.179	0.153	0.179	0.162	0.176	0.201	0.180	0.176	0.234
Metric	Ours	ULR	SLR	LRR	SVO	GS	SF	CB	CA	SS	SEG	FT	SR	LC
WF $\uparrow$	<b>0.608</b>	0.379	0.473	0.465	0.296	0.519	0.347	0.441	0.315	0.126	0.301	0.289	0.152	0.340
OR $\uparrow$	<b>0.604</b>	0.443	0.505	0.530	0.293	0.520	0.433	0.459	0.297	0.164	0.346	0.387	0.227	0.348
AUC $\uparrow$	<b>0.835</b>	0.814	0.805	0.804	0.808	0.819	0.812	0.782	0.775	0.630	0.792	0.717	0.632	0.716
MAE $\downarrow$	<b>0.138</b>	0.222	0.179	0.170	0.336	0.167	0.247	0.201	0.259	0.253	0.326	0.223	0.229	0.227

$\uparrow$  越大越好, 而  $\downarrow$  越小越好  
最好的三个结果用 red, green 和 blue 分别表示.





# 数值指标比较

Table 7: 不同方法在数据集 MSRA10K 上的性能比较

Metric	Ours	WLRR	SMD	DRFI	RBD	HCT	DSR	MC	MR	HS	PCA	TD	GC	RC
WF ↑	0.688	0.665	0.704	0.666	0.685	0.582	0.656	0.576	0.642	0.604	0.473	0.561	0.612	0.384
OR ↑	0.730	0.701	0.741	0.723	0.716	0.674	0.654	0.694	0.693	0.656	0.576	0.605	0.599	0.434
AUC ↑	0.854	0.852	0.847	0.857	0.834	0.847	0.825	0.843	0.824	0.833	0.839	0.815	0.788	0.833
MAE ↓	0.112	0.127	0.104	0.114	0.108	0.143	0.121	0.145	0.125	0.149	0.185	0.161	0.139	0.252
Metric	Ours	ULR	SLR	LRR	SVO	GS	SF	CB	CA	SS	SEG	FT	SR	LC
WF ↑	0.688	0.425	0.601	0.448	0.339	0.606	0.372	0.466	0.379	0.137	0.349	0.277	0.155	0.345
OR ↑	0.730	0.524	0.691	0.494	0.245	0.664	0.440	0.542	0.409	0.148	0.323	0.379	0.256	0.380
AUC ↑	0.854	0.831	0.840	0.801	0.844	0.839	0.812	0.821	0.789	0.601	0.795	0.690	0.597	0.690
MAE ↓	0.112	0.224	0.141	0.153	0.340	0.139	0.246	0.208	0.237	0.255	0.315	0.231	0.232	0.234

↑ 越大越好, 而 ↓ 越小越好  
最好的三个结果用 red, green 和 blue 分别表示.



# 总结与展望

图像显著性目标检测是十多年来一直活跃在图像处理领域的一门新兴学科, 它不仅在图像分割和目标识别中取得了满意的效果, 而且在图像检索、目标跟踪及图像质量评价等大量的实际问题中得到了广泛应用. 近年来, 在低层图像处理和分析中另一个最新的进展是基于非凸 Shatten-p 范数的图像处理. 非凸 Shatten-p 范数现已应用于图像处理和计算机视觉的许多方面, 包括图像恢, 图像填充和图像修补等, 并且得到了很好的效果. 本文从非凸 Shatten-p 范数理论出发, 以图像显著性目标检测为研究主线, 针对当前的低秩-稀疏分解模型给出推广及改进.

本文虽在图像显著性检测建模理论的研究方面取得了一些有意义的成果, 然而由于模型是基于灰度图像, 因此对于彩色图像的刻画亟待解决. 同时, 考虑用张量表示彩色图像是一个比较合理的选择, 所以在接下来的工作中我们将尝试用非凸低秩张量分解进行图像显著性目标检测.



-  H. Peng and B. Li and H. Ling and W. Hu and W. Xiong and S. Maybank (2017)  
Salient Object Detection via Structured Matrix Decomposition  
*IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence.*
-  T. Hastie and R. Tibshirani and M. Wainwright (2015)  
Statistical Learning with Sparsity: The Lasso and Generalizations  
*Chapman and Hall/CRC.*
-  F. Shang and Y. Liu and J. Cheng (2018)  
Tractable and Scalable Schatten Quasi-Norm Approximations for Rank Minimization  
*Computing Research Repository.*
-  F. Shang and J. Cheng and Y. Liu and Z. Luo and Z. Lin (2018)  
Bilinear Factor Matrix Norm Minimization for Robust PCA: Algorithms and Applications  
*IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence.*



J. Cai and E. Candès and Z. Shen (2010)

A Singular Value Thresholding Algorithm for Matrix Completion

*SIAM Journal on Optimization.*

谢谢!